MOZAIK

A matematika TANÍTÁSA

1995. JANUÁR ára: 90,- Ft III. évf. / 1. szám

420242

TARTALOM

NÉHÁNY ÖTLET GEOMETRIAI FELADATOK MEGOLDÁSÁHOZ (ÉRDEMES-E TÖREKEDNÜNK ARRA, HOGY ÁBRÁINK SZÉPEK ÉS SZEMLÉLETESEK LEGYENEK!)
Vincze István, Szeged

MATEMATIKAI ISMERETEK ÉS EGY TANKÖNYV
Csete Lajos, Markotabödöge

SZÓMA - TÉRBELI ÖSSZERAKÓ JÁTÉKOK
Végh Gyula, Szeged

RÖVIDEN A NEM KOOPERATÍV JÁTÉKELMÉLETRŐL
Simonovits András, Budapest

JÓNÁS MÁRTON (1895-1987)
Zsuffa Lajos, Tiszakécske

VERSENYNAPTÁR AZ 1994/95. TANÉVRE

A MATEMATIKA FELADATMEGOLDÓ PONTVERSENY III. FORDULÓJÁNAK FELADATAI

AZ 1993/94 TANÉVI FELADATMEGOLDÓVERSENY SZEGEDI DÖNTŐJÉN KITŰZÖTT FELADATOK MEGOLDÁSA

FELADATROVAT TANÁROKNAK

A diákokban gyakran fogalmazódik meg olyan igény, hogy a problémák megoldásához mutassunk olyan számukra univerzális módszert, amelyet az adott feltételek mellett csak elő kell venni, és máris adódik a megoldás. Tudjuk jól, hogy bizonyos esetekben találhatunk ilyen algoritmusokat... *(3. oldal)*

Meghatározott számú egyforma kockát bizonyos feltételek szerint tartósan összekötünk, s az így kapott idomokból megadott alakzatokat építünk fel. Ebben az egyetlen mondatban foglalható össze a következőkben vázolt térbeli összerakó játékok lényege. *(10. oldal)*

Az 1994. évi közgazdasági Nobel-díjat három kutató, *Harsányi János*, *John Nash* és *Richard Selten* kapta a nem kooperatív játékelmélet területén végzett teljesítményükért. Ebben a rövid ismertető cikkben [6] 11. fejezete alapján áttekintjük, hogy mi a nem kooperatív játékelmélet... *(17. oldal)*

MÓDSZERTANI FOLYÓIRAT

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

módszertani folyóirat

Szerkesztőség:
Főszerkesztő: Dr. Urbán János
Szerkesztőség címe:
6723 Szeged, Debreceni u. 3.
Tel.: (62) 312-988,
FAX: (62) 328-247

Kiadó:
MOZAIK Oktatási Stúdió Kft
Felelős kiadó: Török Zoltánné
Tördelő szerk.: Kovács Attila
Borítóterv: Magyar Csaba

Megrendelhető:
MOZAIK Oktatási Stúdió
6701 Szeged, Pf. 301.
Éves előfizetési díj: 450 Ft

A lap megvásárolható a MOZAIK Könyvesboltokban: Szeged, Csongrádi sgt. 73. Budapest VIII., Üllői út 70.

Megjelent a Művelődési és Közoktatási Minisztérium támogatásával.

A matematika tanításában megjelenő valamennyi cikket szerzői jog védi. Másolásuk bármilyen formában kizárólag a kiadó előzetes írásbeli engedélyével történhet.

ISSN 1216-6650

Készült a Dürer Nyomda Kft-ben
Felelős vezető: Székely András

TARTALOM

NÉHÁNY ÖTLET GEOMETRIAI FELADATOK MEGOLDÁSÁHOZ (ÉRDEMES-E TÖREKEDNÜNK ARRA, HOGY ÁBRÁINK SZÉPEK ÉS SZEMLÉLETESEK LEGYENEK!)
Vincze István, Szeged

MATEMATIKAI ISMERETEK ÉS EGY TANKÖNYV
Csete Lajos, Markotabödöge

SZÓMA - TÉRBELI ÖSSZERAKÓ JÁTÉKOK
Végh Gyula, Szeged

RÖVIDEN A NEM KOOPERATÍV JÁTÉKELMÉLETRŐL
Simonovits András, Budapest

JÓNÁS MÁRTON (1895-1987)
Zsuffa Lajos, Tiszakécske

VERSENYNAPTÁR AZ 1994/95. TANÉVRE

A MATEMATIKA FELADATMEGOLDÓ PONTVERSENY III. FORDULÓJÁNAK FELADATAI

AZ 1993/94 TANÉVI FELADATMEGOLDÓVERSENY SZEGEDI DÖNTŐJÉN KITŰZÖTT FELADATOK MEGOLDÁSA

FELADATROVAT TANÁROKNAK

Közlési feltételek:

A közlésre szánt kéziratokat gépelve két példányban vagy floppy lemezen küldjék meg a szerkesztőség címére. A kéziratok lehetőleg ne haladják meg a 6-8 gépelt oldalt (oldalanként 30 sorban 66 leütés).

A rajzokat, ábrákat, táblázatokat és fényképeket külön lapon megfelelő szövegezéssel kérjük ellátni. (A szövegrészben pedig zárójelben utaljunk rá.)

Kérjük, hogy a szövegbeli citálások név és évszám jelöléssel történjenek, míg a tanulmányok végén a felsorolt irodalmak alfabetikus sorrendben készüljenek.

Kérjük szerzőtársainkat, hogy a kéziratok beküldésével egyidejűleg szíveskedjenek közölni pontos címüket, munkahelyüket és beosztásukat, a megjelent cikkek utáni honorárium kifizetése érdekében személyi számukat. A cikk megjelenése után a lemezeket visszaküldjük.

Vincze István

Néhány ötlet geometriai feladatok megoldásához

Érdemes-e törekednünk arra, hogy ábráink szépek és szemléletesek legyenek?

A tanítás során gyakran adódnak olyan helyzetek, amikor a matematika egyes fejezeteinek érdekességére, hatékonyságára szeretnénk felhívni a figyelmet. Bizonyára mindenkinek – még a matematikát tanító tanároknak is – vannak igazán kedvelt, szívesen alkalmazott módszerei, kiemelt témakörei.

A diákokban gyakran fogalmazódik meg olyan igény, hogy a problémák megoldásához mutassunk olyan számukra univerzális módszert, amelyet az adott feltételek mellett csak elő kell venni, és máris adódik a megoldás. Tudjuk jól, hogy bizonyos esetekben találhatunk ilyen algoritmusokat, de sokszor egyáltalán nem.

Az ilyen fejezetek között az egyik legfontosabb a geometria témaköre, amely igen nagymértékű kreativitást, ötletgazdagságot igényel mind a diákok, mind a tanárok részéről. Talán ez az, ami népszerűvé teheti (ha sikerül megfelelő érdeklődést felkelteni), és emiatt lehet népszerűtlen is.

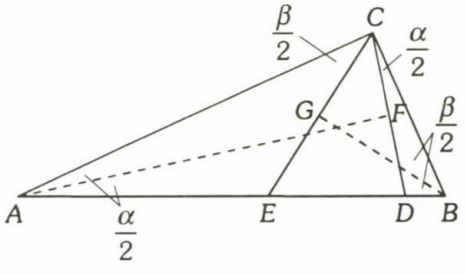
Az alábbi feladatok ismertetésének célja természetesen az előbbi. Ezek többsége az órai munka során vetődött fel, és a megoldások egy része a tanulók ötleteire, javaslataira épül. Úgy vélem, hogy alkalmasak lehetnek arra, hogy felhívják a figyelmet a geometriai problémák megoldásainak nehézségeire és szépségeire egyaránt.

1. Miért nem adunk geometriai megoldást?

1. Feladat: *Az ABC derékszögű háromszög AB átfogóján vegyük fel a D és E pontokat úgy, hogy AC = AD és BC = BE legyen! Mekkora az ECD szög?* (Varga Tamás Matematika Verseny 7. osztály, 1994.)

A verseny másnapján azt hiszem minden osztályban természetes, hogy a feladatokat megbeszélik. A diákok elmondják megoldásaikat, problémáikat a feladatokkal kapcsolatban. A megoldási útmutató és a próbálkozások is olyan megoldásokat adtak, amely inkább nevezhető egy algebrai kifejezés rendezésének, mint egy geometriai ábra elemzésének. Talán még azok a gyerekek jártak legközelebb a geometriai úthoz, akik méréssel próbálkoztak. Felmerülhet az az igény, hogy olyan megoldást adjunk, amely jobban illik a feladat jellegéhez.

Készítsük el a következő ábrát, ami sok mindent sugallhat számunkra. Mivel ADC és BCE háromszög egyenlő szárú, ezért ezek szimmetriatengelyei felezik a szárak szögét és merőlegesen felezik az alapokat F illetve G pontokban. Így a $CAF\sphericalangle$ és $BCD\sphericalangle$, valamint a $CBG\sphericalangle$ és $ACE\sphericalangle$ merőleges szögpárokat alkotnak. Ezért $ACE\sphericalangle + BCD\sphericalangle = \frac{\beta}{2} + \frac{\alpha}{2} = 45°$. Ez pedig azt jelenti, hogy a keresett szög is 45°.



2. Egy „nagyon elemi" megoldás

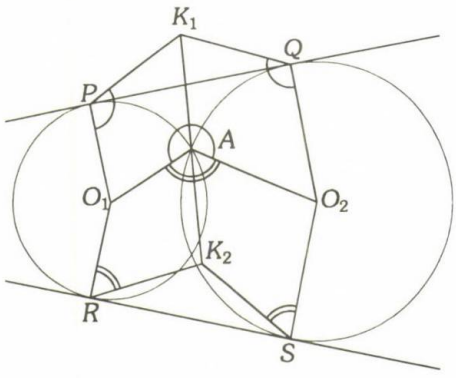
A következő feladat szintén hasonló körülmények között került elő, mint az előző.

2. Feladat: *Legyen két egymást metsző kör k_1 és k_2, az egyik közös pontjukat jelölje A! A két kör egyik közös érintője k_1-et P-ben, k_2-t Q-ban, a másik közös érintő k_1-et R-ben, k_2-t S-ben érinti. Bizonyítsuk be, hogy a PAQ és RAS háromszögek körülírt körei érintik egymást!* (OKTV III. kategória, 1994.)

A feladatnak két megoldását is közölték a javítási útmutatóban. Az egyik a kerületi szögek tételét használja fel, a másik pedig az inverzió tulajdonságaira épül.

A következő megoldásban nem használunk fel az általános iskolai ismereteket meghaladó tulajdonságokat. A megoldást az egyik tanítványom „nagyon eleminek" minősítette. Azt kell csak egy jól elkészített ábrán észrevennünk, hogy a háromszögek köré írt körök középpontjai a csúcsoktól egyenlő távolságra vannak.

Tekintsük a következő ábrát! Erről az azonos nagyságú szakaszok a következők lesznek: $O_1P = O_1R = O_1A$, $O_2Q = O_2S = O_2A$, $K_1P = K_1A = K_1Q$, és $K_2R = K_2A = K_2S$. Ezenkívül felhasználva azt, hogy az egyenlő szárú háromszög alapján fekvő szögek egyenlők, és egy kör érintőjére merőleges az érintési pontba húzott sugár, teljesülnek az $O_1PK_1\sphericalangle = O_2QK_1\sphericalangle$ és $O_1RK_2\sphericalangle = O_2SK_2\sphericalangle$ egyenlőségek.



A fentiek alapján az O_1PK_1A, O_2AK_1Q, O_1RK_2A valamint az O_2SK_2A négyszögek deltoidok. A $K_1AK_2\sphericalangle = 180°$, ami azt jelenti, hogy a PAQ és az RAS háromszögek körülírt körei az A pontban érintik egymást.

3. A kevesebb néha többet mutat

A következő feladat jó példája lehet annak, hogy időnként a probléma megközelítése kevesebb számolással járó, mégis több információt jelentő megoldást adhat.

3. Feladat: *Mutassuk meg, hogyha egy 10 egységszer 8 egységszer 6 egységnyi oldalú téglatestben akárhogyan helyezünk is el 9 darab (egymásba nem nyúló) egységkockát, akkor biztosan elhelyezhető a téglatestben még egy egységnyi sugarú gömb is (amelynek nincs közös belső pontja egyik kockával sem és minden pontja a téglatestbe esik)!* (OKTV III. kategória, 1994.)

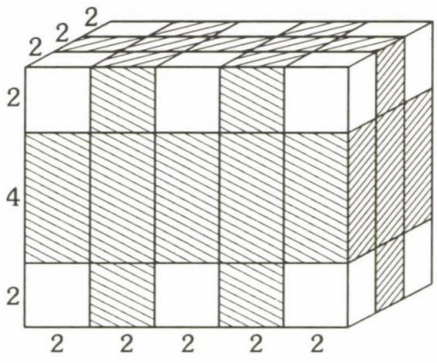
Egy lehetséges megoldás, ha képzeletben beburkoljuk a téglatest belső falait és az egységkockák felületét egy olyan réteggel, amely tartalmazza mindazon egységnyi sugarú gömbök középpontjait, amelyek a téglatest falába, illetve az egységkockákba belemetszenek. Némi számolással megmutatható, hogy ennek a rétegnek az össztérfogata kisebb a téglatest térfogatánál. Ebből már következik, hogy van olyan pont, amely nem tartozik a réteghez, azaz köré írt egységnyi sugarú gömb a téglatestbe esik, és nem metsz bele egyik kockába sem.

A következő megoldás ennél szemléletesebb, és a feladat állításánál erősebbet eredményez.

Osszuk fel a téglatestet az ábrának megfelelő módon, és tekintsük elválasztó falaknak a satírozott tartományokat!

Ezek a falak 12 darab 2 egységszer 2 egységnyi kockát jelölnek ki úgy, hogy ezek mindegyike legalább 2 egységnyi távolságra van egy másiktól. Ez azt jelenti, hogy egy tetszőlegesen elhelyezett egységkockának egyszerre csak egy 2×2-es kockával lehet közös

pontja, mivel az egységkocka két legtávolabbi pontja is csak $\sqrt{3} < 2$ távolságra van egymástól.



Mivel mindegyik kockába beleírható egy egységnyi sugarú gömb, ez azt jelenti, hogy még 11 egységkockát a téglatestbe helyezve marad legalább egy 2×2-es kockánk, amelyiknek egyik egységkockával sincs közös pontja, azaz írható bele egységsugarú gömb. (Ez a térfogatszámításos megoldás alapján nem adódik.)

Az ábra alapján még az is érezhető, ha arra törekszünk, hogy úgy helyezzük el a 12 egységkockát, hogy a kijelölt 2×2-es kockákba már ne tudjunk egységsugarú gömböt írni, akkor a téglatest közepe elég „üres" maradhat ahhoz, hogy esetleg elférhet oda egy megfelelő gömb. A számítások azt mutatják, még 13 egységkocka elhelyezése esetén is marad lehetőségünk arra, hogy egy egységsugarú gömböt a téglatestbe helyezzünk.

4. A szemléltetés előnyei

Az egyes problémák felvetése nem minden esetben ösztönöz bennünket arra, hogy valamilyen ábra, geometriai tulajdonság segíthet a megoldásban. Mégis, ha ilyen úton keressük az összefüggéseket, akkor néha nagyon meglepő és természetes módon adhatunk gyors válaszokat.

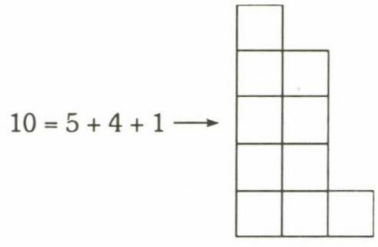
4. Feladat: *10 darab egyforintost dobunk bele egyforma malacperselyekbe kétféleképpen:*

a) 3 perselybe úgy, hogy előfordulhat, hogy lesz olyan persely, amelyik üresen marad,

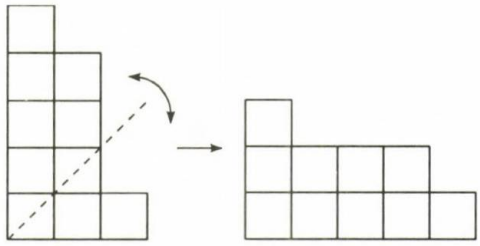
b) 10 perselybe úgy, hogy egy perselybe legfeljebb 3 forintot dobunk.

Melyik esetben tudjuk a 10 darab egyforintost többféleképpen elhelyezni?

Szemléltessük az *a)* esetben történő elrendezéseket a következő módon. Egy fajta perselybe való bedobás utáni állapotban a 10 darab egyforintos érmét 10 darab egységnégyzetből álló oszloppal reprezentálhatjuk. Mivel a perselyeket nem tudjuk megkülönböztetni egymástól, ezért azokat a bennük található érmék száma szerint csökkenő sorrendbe rendezzük, és az ezeket leíró oszlopokat egymás mellé rakjuk. Így az alábbi ábra annak az esetnek felel meg, amikor az egyes perselyekben 5, 4 illetve 1 darab egyforintos érme van.



Ha minden elrendezést a fentiek szerint szemléltetnénk, akkor az összes elhelyezési lehetőség indukálna egy neki megfelelő „lépcsőszerű" ábrát. Ha egy ilyen „lépcsőt" a bal alsó sarkából induló 45°-os egyenesre tükrözünk, akkor egy olyan ábrához jutunk, amely felcseréli a „lépcső" magasságát és szélességét. Az az egy olyan felosztást szemléltet, amelyik éppen a *b)* pontban megfogalmazottnak tesz eleget.



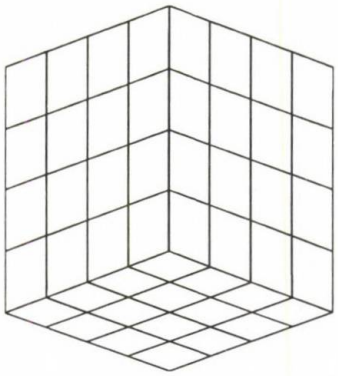
Ezzel a trükkel sikerült azt elérni, hogy a különböző feltételeknek eleget tevő perselyfeltöltések párba állíthatók. Ez pedig azt jelenti, hogy mindegyiket ugyanannyiféleképpen tudjuk megvalósítani.

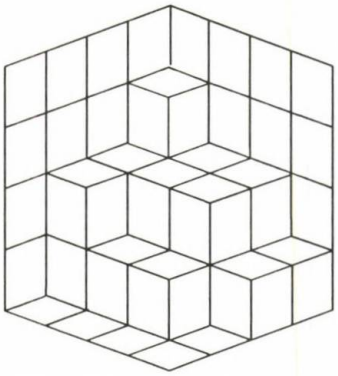
5. A látásunk korlátai

Az előző pontban megoldott feladat jól érzékelteti azt, hogy milyen sokat jelent egy jól elkészített ábra. Az ábrák elemzése során azonban nem szabad megfeledkezni arról, hogy életünket a térben mozogva éljük le, és gyakran előfordul az, hogy egy ábra másként jelenik meg előttünk, mint amit ténylegesen a rajzon elkészítettünk. Ennek a „belemagyarázásnak" az előnyeit ki is használhatjuk.

5. Feladat: *A 4 egység oldalú szabályos hatszög többféleképpen lefedhető 48 darab egységnyi oldalú rombusz alakú dominóval (amelyek két, egységnyi oldalú szabályos háromszögből állnak). Igazolandó, hogy minden ilyen lefedéshez mindhárom állású dominóból 16 darabot használtunk fel!*

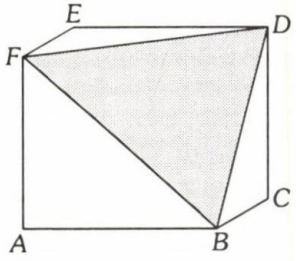
Az alábbi ábrákon látható két megoldás is. Ha elegendő ideig szemléljük az ábrákat, akkor szinte rákényszerülünk arra, hogy hatszög helyett egy térbeli képet lássunk magunk előtt.



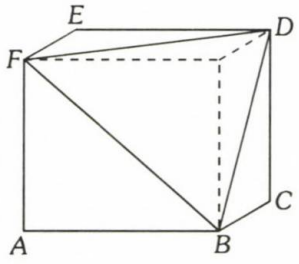


Ez a kép nem más, mint egy 4 egység élű kocka, amelybe a belső sarokból indulva hézagmentesen helyeztünk el egységnyi élű kiskockákat oly módon, hogy egy elhelyezett kocka alatt és mögött nincs lyuk. Ezen térbeli kép alapján már azonnal adódik, hogy mindhárom állású dominóból ugyanannyi kell, hogy legyen.

6. Feladat: *Az ábrán látható hatszög szemközti oldalai párhuzamosak és egyenlők. Igaz-e, hogy a vonalkázott részek területe mindig a hatszög területének a fele?*



Az ábra itt is sugallja, hogy amit látunk, az nem más, mint egy téglatest, amelynek a szemben levő sarkát lemetszettük. Ha a hiányzó éleket az ábrába belerajzoljuk, akkor azonnal adódik, hogy az állítás igaz, hiszen a keletkező paralelogrammák átlóiról tudjuk, hogy azok felezik a paralelogramma területét.



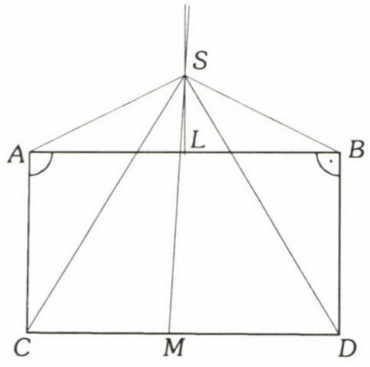
6. A szemléltetés veszélyei

Befejezésül fel szeretném hívni a figyelmet arra, hogy az ábrák veszélyeket is hordozhatnak magukkal. Gyakran elhangzik különösen koordináta-geometriai órákon, hogy nem szükséges minden esetben arra törekednünk, hogy az elkészített rajzok a megadott feltételekhez pontosan igazodjanak. Elegendő azok elemzésénél a megfelelő tulajdonságaikat kihasználni és azok segítségével a gondolatmenetünket felépíteni.

Csak olyan állításokat szabad felhasználnunk a megoldásaink során, amelyek nyilvánvalóan teljesülnek, vagy azokat már régebben igazoltuk. Természetesen egy ábra itt is segíthet bennünket, de vannak ennek veszélyei is. Erre vonatkozik a következő bizonyítás, ami első hallásra igen meglepő minden diák számára, és végiggondolása igen tanulságos.

Bizonyítjuk, hogy a tompaszög egyenlő a derékszöggel.

Legyen adva az $ABCD$ négyszög, amelyben $ABD\sphericalangle = 90°$, $BAC\sphericalangle$ pedig tompaszög, és $AC = BD$. Az AB és CD oldalak középpontjában merőlegeseket emelünk, melyek egymást S pontban metszik. Kössük össze S -et a négyszög csúcspontjaival!



Nyilvánvaló, hogy $SA = SB$, $SC = SD$. Mivel a feltevés szerint $BD = AC$, ezért SAC és SBD háromszögek egybevágóak, hiszen oldalaik rendre egyenlők. Ennélfogva $CAS\sphericalangle = DBS\sphericalangle$. Másrészt világos, hogy $LAS\sphericalangle = LBS\sphericalangle$, mert az SAB háromszög egyenlő szárú.

Így $CAS\sphericalangle - LAS\sphericalangle = DBS\sphericalangle - LBS\sphericalangle$, tehát $CAB\sphericalangle = ABD\sphericalangle$. Ezzel az állítást igazoltuk!?

Irodalom

[1] Hajnal Péter: Egyenlőségek, oszthatóságok bizonyítása kombinatorikus módszerekkel, POLYGON IV. kötet 1. szám.

[2] Totik Vilmos: Egy ötlet: Lépjünk ki a térbe, POLYGON III. kötet 1. szám.

[3] A 2. és 3. feladat megoldása Tari Árpád és Tigyi István tanítványaim OKTV-dolgozata alapján készült.

Csete Lajos

Matematikai ismeretek és egy tankönyv

A matematikai feladatok megoldásához Pólya György tanácsai közismertek: „Elsőként értsd meg a feladatot, másodszor keress összefüggést az adatok és az ismeretlen között, készítsd el a megoldás tervét, harmadszor hajtsd végre a tervedet, negyedszer vizsgáld meg a megoldást." A feladatmegoldásoknak erre az útjára Pólya György sok példát mutatott, a főbb tennivalókat apróbb tanácsokkal is kiegészítette. Ezeket az iskolai oktatásunkban is szem előtt kell tartanunk, de az egyes lépéseket kellően elő is kell készítenünk.

Értsd meg a feladatot! Egy feladat megértésének előfeltétele, hogy a tanulók ismerjék a problémával kapcsolatos fogalmakat, azok tulajdonságait. Ezért a fogalmak tisztázása a matematika tanításának egyik alapvető feladata.

Keress összefüggést az adatok és az ismeretlen között! A matematika tanításának az is alapvető feladata, hogy a tanulók felismerjék, majd tudatosan megjegyezzék (emlékezetükben tartsák) a fogalmakhoz kapcsolódó igaz állításokat (tételeket) és ezek között legyen áttekintésük.

Készíts tervet, hajtsd végre, vizsgáld meg a megoldást! Arra kell nevelnünk tanítványainkat, hogy ők keressék meg a tárgyalt problémához kapcsolódó fogalmakat, tételeket, kapcsolatokat és ezekből ők állítsák össze a megoldás gondolatmenetének „láncát", azaz a megoldás tervét, továbbá, hogy ennek alapján kitartóan dolgozzanak, és végül kritikus szemmel vizsgálják át munkájukat, ha szükséges, akkor azt egészítsék ki, vagy javítsák.

A gondolatmenetnek, a megoldási tervnek lánchoz hasonlítását *Hajnal Imre „Matematikai ismeretek 13-14 éveseknek"* című tankönyvének bevezetőjéből vettem. Ez a tankönyv az előbb felvázolt gondolatmenetre épül. Az ismeretek tárgyalása a **fogalmak kialakításával, értelmezésével** kezdődik, majd a közöttük lévő **kapcsolatok keresésével** folytatódik. A kidolgozott példák segítik az anyag **megértését**, gyakorlati **alkalmazását** és módszert mutatnak az önálló munkához.

A tanárt általában nem helyettesítheti egy tankönyv, hiszen a tanár kelti életre a tananyagot, de egy jó tankönyv sokat segíthet a diáknak is, a tanárnak is. Az említett könyv olyan, hogy ha egy tanuló betegség miatt hiányzik az órákról, akkor a tankönyvre támaszkodva bepótolhatja elmaradását. Erre is való a sok kidolgozott feladat. Ezek – ne titkoljuk – az utánzáshoz is megfelelőek. Észszerű utánzással is sokat lehet tanulni. Kellenek az alaposan kidolgozott mintapéldák. Példák, példák és példák, ezek egy matematika tankönyvben roppant fontosak. Ezeken keresztül lehet megvilágítani a matematikai gondolkodást.

A tankönyv tartalmazza az általános iskola 7. és 8. osztályának tantervi anyagát. terjedelme 239 oldal. Röviddé teszi, hogy a kitűzött feladatok csak sorszámukkal szerepelnek. A hivatkozott feladatok a *„Kosztolányi-Mike-Palánkainé-Szederkényiné-Vincze: Matematika összefoglaló feladatgyűjtemény 10-14 éveseknek"* című példatárban található meg. A tankönyv szerves kapcsolatban van a feladatgyűjteménnyel.

A tankönyv alapos, érthető nyelvezetű, precíz munka. Benne **logikus felépítésben következnek egymás után az egymásra épülő ismeretek**. Sok tanárnak vezérelve a **szilárd alapokon nyugvó, hézagmentes építkezés**. Higgadtan, **rendszeresen építkezünk, nem hagyva bizonytalan részeket, hézagokat magunk mögött**. Erre tesz sikeres kísérletet a tankönyvíró ezen művében is. A tankönyv jól használható az általános iskolák 7. és 8. osztályában és a 6, illetve a 8 osztályos gimnáziumok megfelelő korú tanulóinak képzésében.

A tankönyv, a 7. és 8. osztály tantervi anyagának megfelelően, két részre tagolódik.

Az I. rész a korábbi osztályok anyagáról is áttekintést nyújt. Egy-egy rövid fejezet foglalkozik a pozitív egész számokkal végzett alapműveletekkel; a 0 és a negatív egész számok bevezetésével; az előjeles számokkal végzett alapműveletekkel; a törtszámokkal; a törtekkel végzett alapműveletekkel; az osztókkal, prímszámokkal, összetett számokkal, oszthatósági szabályokkal; a legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös prímtényezős felbontással történő meghatározásával. Ezek már ismert fogalmak és ismert eljárások. Mostani rövid tárgyalásuk a mélyebb összefüggésekre utalnak. A 13 éves korban megfelelő módon foglalkoznak a MIÉRT? kérdésre adandó magyarázattal és a lehetőségekhez képest utalnak az ismeretek későbbi elmélyítésére is.

Ezeket két példával illusztráljuk. Idézet a tankönyv 15. oldaláról:

„Szorzás 0-val, egy pozitív szám szorzása egy negatív számmal

Két pozitív szám szorzata pozitív, a szorzat kiszámítási módját már ismerjük.

Ha a 0-val, negatív számmal történő szorzás módját még nem ismerjük, akkor is természetesnek érezzük, hogy az valamilyen kapcsolatban van a pozitív számok szorzási eljárásával. A legmegfelelőbb kapcsolatot úgy találjuk meg, hogy egy pozitív számot, például a 6-ot szorozzuk 4-gyel, 3-mal, 2-vel, 1-gyel, azaz rendre 1-gyel csökkenő pozitív számmal és megvizsgáljuk a szorzat változását (24, 18, 12, 6). Azt a (természetszerű) szabályosságot tapasztaljuk, hogy azok rendre 6-tal csökkennek. Ha a 4, 3, 2, 1 szorzótényezőt tovább csökkentjük és 0-val, –1-gyel, –2-vel, ... szorzunk, akkor természetszerűnek vesszük, hogy a szorzat továbbra is rendre 6-tal csökken (0, –6, –12, ... lesz). Ezeket táblázatszerűen is felírjuk... Ezek alapján megfogalmazzuk: ..."

A könyv több fejezeténél a cím után zárójeles megjegyzés is van. Például „A 0 és a negatív egész számok" cím után zárójelben „A számfogalom bővítése I." áll, a törtszámok fejezete után (szintén zárójelben) „A számfogalom bővítése II.". A 174. oldalon a számok, számhalmazok tárgyalása közben egy fejezet címe: „Nem racionális számok (A számfogalom bővítése III.)" - Hasonlóan a 48.oldalon „Egyenletek, megoldásuk (I.)" című fejezet van, a 73. oldalon „Egyenletek, megoldásuk (II.)", a 207. oldalon „Egyenletek megoldása (III.)" Ezek olyan rejtett figyelemfelhívások, amelyek az érdeklődést felkelthetik és egyes tanulóknak sokat mondhatnak (de a gyengébb tanulókat nem zavarják).

Az apró betűs utalások gyakran előremutatóak. Szedésük mutatja, hogy az órán történő tárgyalásuk elhagyható, az érdeklődő tanulóknak azonban hasznos.

Az új anyag feldolgozási módszere olyan, hogy közben természetesen fogalmazódjon meg a kérdés: **Mi az? Mi a lényege? Mik a tulajdonságaik? Az új ismeret milyen kapcsolatban van az eddigi ismereteinkkel?** (Ezeknek a kérdéseknek a megfogalmazását tudatossá is kell tennünk.)

A feladatok megoldására a könyv vége felé nyíltan megfogalmazva is szerepel az a tanács, amely – rejtve – korábban is megtalálható: *„Az összetettnek és nehéznek tűnő problémákat apróbb kérdések sorozatára kell bontanunk.* (Hasznos, ha saját magunknak is kérdéseket teszünk fel és azokra választ keresünk.) Lehetséges, hogy az első gondolat nem vezet célhoz. Kitartó munkával újabb utat kell keresnünk. Sok feladatot kell megoldanunk. *A megoldások tapasztalatait jegyezzük meg, azokat később jól hasznosíthatjuk."*

A könyvben csak két helyen vannak kitűzött feladatok: a betűs kifejezések bevezetésénél és az egyenletek tárgyalásának kezdetén. Ez figyelemfelhívás is. Ezek a matematika tanításának kritikus pontjai. Az itt fellépő nehézségekre ajánlatos lenne a megszokottnál nagyobb figyelmet fordítani. – A tárgyalt anyaghoz kapcsolódó gyakorló feladatokat – az egyes fejezetek végén – az említett feladatgyűjteményből ajánlja a szerző.

A tankönyv utolsó 9 oldalán szó esik a mérésekről, a kerekített értékekkel történő számolásról; sorrendbe állításokról, kiválasztásokról, összeszámlálásokról, valamint egy valószínűségi kísérletről. Ezek nem tartoznak a szorosan vett tantervi anyaghoz, de megemlítésük szükséges és hasznos. Ezek is indokolják a tankönyv utolsó néhány mondatát: „... látnunk kell, hogy az egyes fejezetekben lévő ismeretek egymagukban csak szűk területen használhatók. A közöttük lévő kapcsolatok a fontosak. Ezekkel lehet élővé tenni az elszigetelt ismereteket. *A kapcsolatok felismerésével, körültekintő gondolkodással sokkal több problémát megoldhatunk, mint amennyi az iskolai tankönyvekben szerepel."*

A bemutatott tankönyv szerepel a '95/96-os tanév tankönyvjegyzékén.

Végh Gyula

Szóma
Térbeli összerakó játékok

SZÓMA *(Térbeli összerakó játékok feladatokkal, megoldásokkal és színes modellekkel)* címmel a MOZAIK Oktatási Stúdió kiadásában 1994 novemberében jelent meg az a könyv, amely nyolc térbeli összerakó játék, valamint azok kombinációinak leírását és közel százötven feladat rajzos kitűzését tartalmazza. A könyvben megtalálhatjuk a feladatok egy-egy megoldásának szemléletes ábrázolását és a térbeli modellek összeállításához szükséges útmutatásokat, mellékletként pedig kilencvenöt test színes felszíni hálóját.

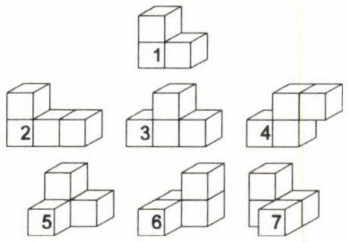
Meghatározott számú egyforma kockát bizonyos feltételek szerint tartósan összekötünk, s az így kapott idomokból megadott alakzatokat építünk fel. Ebben az egyetlen mondatban foglalható össze a következőkben vázolt térbeli összerakó játékok lényege.

Szóma

Piet Hein dán mérnök és matematikus játékának ötlete 1936-ban egy kvantumfizikai előadáson született, ahol az előadó arról beszélt, hogy a kvantummechanikában miként módosul a tér fogalma, s szemléltetésként fölvázolta a tér elemi kockákra való felosztását.

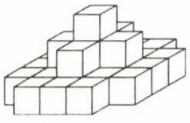
Piet Hein megkereste azokat a *szabálytalan* (konkáv testeket eredményező) kockakombinációkat, amelyeket legfeljebb négy, azonos nagyságú kockából lehet összeállítani úgy, hogy a kockák lapjaikkal illeszkedjenek egymáshoz.

Összesen hét ilyen alakzatot építhetünk fel, három kockából egyet, négy kockából hatot:

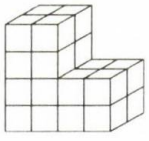


A *szóma* (görög szó, jelentése: test) hét eleme 27 darab egységnyi kockát tartalmaz, az alapfeladat az elemekből a három egység élű kocka összeállítása.

A szóma elemeiből több érdekes alakzat építhető fel, például:



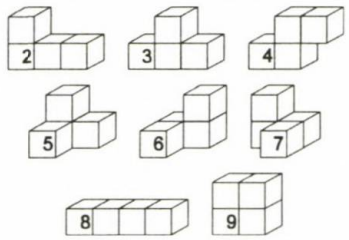
Felépíthető az 1. elem éleit tekintve kétszeres, térfogatát tekintve nyolcszoros nagyítása a hat darab *négyes* elemből:



Tetraszóma

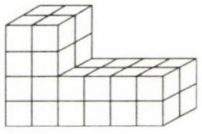
A szóma elemei nem egységesek, mivel a játék egyaránt tartalmaz három és négy kockából összeillesztett idomot is, de nem szerepel az összes ilyen alakzat, mivel a szabályos elemeket kizárja. Ezen segíthetünk, ha elhagyjuk az 1. elemet, és a hat darab négyes alak-

zathoz hozzátesszük a négy kockából álló téglatesteket:

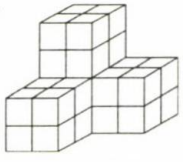


A *tetraszóma* (tetra-: négy-) nyolc elemét 32 darab egységnyi kocka alkotja.

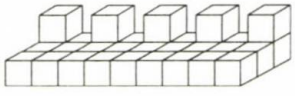
Ebből a játékból természetesen lehetetlen kockát építeni, ellenben kirakható bármelyik elemének éleit tekintve kétszeres, térfogatát tekintve nyolcszoros nagyítása. Ne engedjünk azonban a kísértésnek, miután rájöttünk, hogy miként alakítható ki egyszerre két darab $4 \times 2 \times 2$ egység élű hasáb! E két testet ugyanis könnyen összekapcsolhatjuk a játék hat eleméhez hasonló formájúakká, mivel a 3. és az 5. elem kivételével valamennyi maga is előállítható két darab $2 \times 1 \times 1$ egység élű hasábból. Nagyobb kihívást jelentenek a hat elem olyan nagyításai, melyek nem választhatók szét a két alkotóra!



(A 3. és az 5. elem nagyításánál természetesen erre a megszorításra nem kell ügyelnünk.)

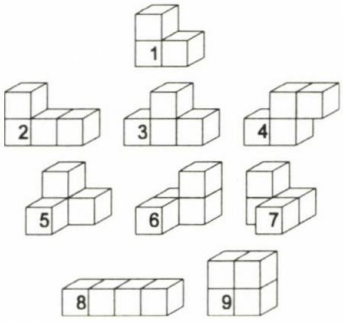


Érdekes építményeket rakhatunk ki a tetraszóma elemeiből is:

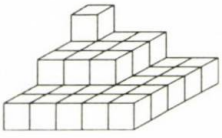


Szóma és tetraszóma

A szóma és a tetraszóma egyesítettje is alkalmas változatos formák kialakítására. Vegyük a szómához a tetraszóma két szabályos elemét (vagy vegyük a tetraszómához a szóma három kockából álló elemét)!



Az összesen 35 darab egységnyi kockából álló kilenc elemmel több idomot is összerakhatunk:



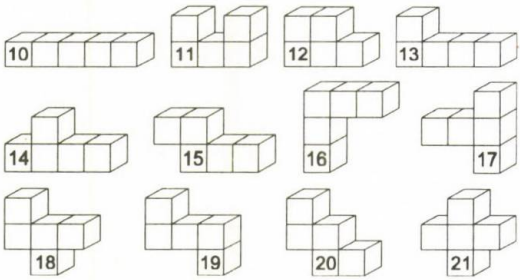
Térbeli pentominó

Solomon W. Golomb játéka:

Öt egyforma négyzetet tizenkét különböző módon illeszthetünk oldalaikkal egymáshoz. Ezek a síkidomok a *pentominó* (penta-: öt-) elemei. A feladatok – különféle síkidomok lefedése a pentominó elemeivel – lényegükben nem változnak, ha azokat a pentominó háromdimenziós megfelelőjével oldjuk meg, viszont így kapcsolódnak térjátékainkhoz. Térbeli pentominót kapunk,

- ha a pentominó elemeire egységnyi magas egyenes hasábokat emelünk; illetve
- ha öt egyforma kockát közös síkra helyezve az összes különböző módon lapjaikkal összekötünk.

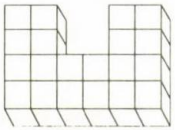
A pentominó háromdimenziós elemei:



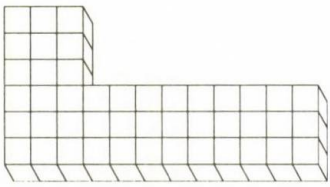
A pentominó feladványaihoz képest a háromdimenziós változat feladatai úgy módosulnak, hogy azokban síkidomok lefedése helyett egységnyi magas hasábokat kell kitölteni. Kirakhatjuk a 10×6, a 12×5, a 15×4 és a 20×3 egység alapú hasábokat.

Összeállíthatók a pentominó több elemének nagyításai úgy, hogy a keletkező egységnyi magas hasábok alapélei a síkbeli pentominó elemek megfelelő oldalainak kétszeresei illetve háromszorosai legyenek. (Más szóval a nagyítás során eltekintünk az elemek vastagságától.)

A kétszeres nagyításokhoz négy elem szükséges.

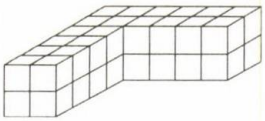


Kirakhatók a pentominó elemek olyan nagyításai, melyben a hasábok alapélei háromszorosai a síkbeli elemek oldalainak! Az egyes feladatok megoldásához kilenc elemet kell felhasználnunk:



Vegyük észre, hogy az eddigi térbeli pentominó feladványokat síkbeli elemekkel is megoldhattuk volna! A továbbiakban éljünk a lehetőséggel, és használjuk ki a háromdimenziós változat előnyeit!

Nyolc elemből felépíthető több térbeli elem éleit tekintve kétszeres nagyítása is. Ezek az alakzatok két egység magasak, s az őket alkotó elemek az eddigiektől eltérő helyzetben is szerepelhetnek bennük:



A tizenkét elemből összeállítható az $5 \times 4 \times 3$, a $6 \times 5 \times 2$ és a $10 \times 3 \times 2$ egység élű téglatest.

Pentaszóma

Említettük, hogy a szóma elemei nem egységesek, azonkívül, mivel a szabályos elemeket kizárja, nem szerepel a játékban az összes, azonos számú kockából összeilleszthető alakzat. Habár a tetraszóma és a pentominó elemei egységesek, ezekben a játékokban nem tűzhető ki annak a mértani testnek – a kockának – a felépítése, amely játékaink mottójának tekinthető. Tökéletes összerakós térjáték lehetne például a tetraszóma, ha összesen tizenhat elem alkotná. Ekkor alapfeladatként tűzhetnénk ki a négy egység élű kocka összeállítását. Ilyen értelemben azonban tökéletes térjáték nem létezik. Harmonikus marad viszont a játék, ha elemeinek száma meghaladja ugyan a kockához szükséges mennyiséget, de azok egy újabb réteg kiépítéséhez már nem elegendők.

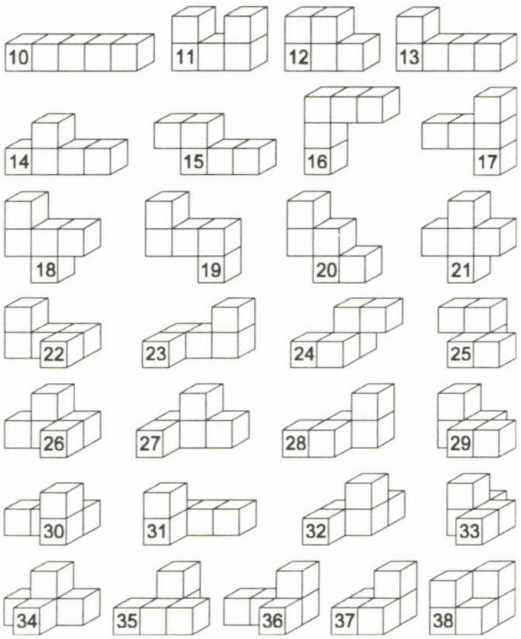
Hagyjuk el a térbeli pentominó második meghatározásából a ,,közös síkra helyezve'' kitételt!

Pentaszóma:

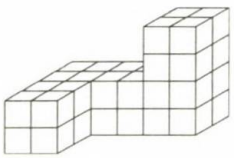
Öt darab egységnyi kockát 29 különböző módon illeszthetünk lapjaikkal egymáshoz, ezek az alakzatok a játék elemei. Az alapfeladat az elemek közül 25 darabból az öt egység élű kocka összeállítása. (A kimaradó négy elem kevés ahhoz, hogy a kockát elrontsa.)

A térbeli pentominó értelmezéséből következik, hogy annak elemei megtalálhatók a pentaszóma elemei között.

A pentaszóma elemei:



Mielőtt megpróbálkoznánk a pentaszóma alapfeladatának megoldásával – mely korántsem egyszerű lecke még a háromdimenziós pentominó utolsó feladataihoz képest sem –, bemelegítésül építsük fel néhány pentaszóma elem éleit tekintve kétszeres nagyítását! Ez könnyebb feladat, mint a térbeli pentominó elemek kétszeres nagyítása, mert most a nyolc elemet nem tizenkét, hanem 29 elemből választhatjuk ki. A pentaszóma elemeiből az összes pentaszóma elem, tehát az összes pentominó elem kétszeres nagyítása is kirakható, így azoké is, amelyeket magukkal a háromdimenziós pentominó elemekkel nem lehetett.

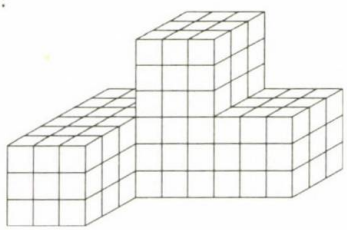


A pentaszóma a definiált értelemben akkor lenne tökéletes játék, ha elemeinek száma 25 volna. Ez a látszólagos hiányosság azonban a játék során erénnyé válik. A négy fölösleges elem megléte egyrészt megkönnyítheti az alapfeladat megoldását, amennyiben a kocka összeállításánál az utolsó szükséges elemet öt elem közül választjuk ki. Másrészt a lehetőségek számát megsokszorozza, mert feladatként tűzhető ki bármelyik 25 elem felhasználásával (bármelyik négy elem elhagyásával) is a kocka felépítése.

Ez olyan sok különböző feladat, hogy ennyi megoldást képtelenség megtanulni, ezért a pentaszóma lehetőséget nyújt versenyek rendezésére is, ahol véletlenszerűen kiválasztott 25 elemből kell a kockát minél rövidebb idő alatt kirakni.

Egy-egy elemet többféle állásban is be tudunk építeni a kockába. Az elemek lehetséges sorrendje – azok összes lehetséges, egymástól eltérő elforgatott helyzetében – olyan rendkívül nagy szám, hogy a pentaszóma alapfeladatának összes megoldását képtelenség felkutatni.

Huszonhét elemből kirakható bármelyik elem éleit tekintve háromszoros nagyítása is. Például:



A pentaszóma huszonkilenc elemét tulajdonságaik alapján többféleképpen csoportosíthatjuk.

Vizsgáljuk meg az elemek szimmetriatulajdonságait, s azok következményeit!

Bármelyik elemnek vagy tükörsíkja van, vagy megtalálható a tükörképe a játék elemei között. Ez a játék definíciójából közvetlenül következik, hiszen csak az az alakzat különbözik a tükörképétől, amelynek nincs szimmetriasíkja. (Ilyen a 22-33-ig sorszámozott tizenkét elem, s ezek páronként csak irányításukban különböznek egymástól.)

A játék során hasznosan alkalmazható az elemeknek azon tulajdonsága, hogy hány elforgatott helyzetben építhetők be az összeállítandó alakzatba. Könnyen belátható, hogy ezt a szimmetriatengelyek száma határozza

meg, mivel a tengelyesen szimmetrikus térbeli alakzat és tükörtengelye körüli 180°-os elforgatottja azonos.

Így az egy tükörtengelyes 11., 16., 17., 19., 20., 22-25. és 34. elemnek: tizenkettő; a 10. és a 21. elemnek, melynek van három egymásra merőlegesen elhelyezkedő tükörtengelye: három; míg a többi, szimmetriatengelylyel nem rendelkező elemnek: huszonnégy, egymástól eltérő állása létezik.

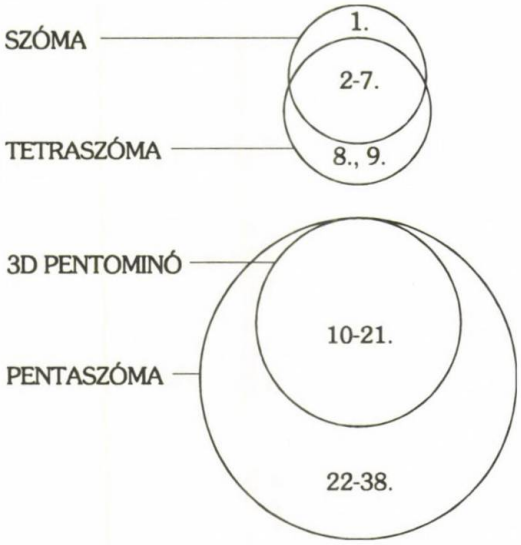
(Külön érdekessége a 19. elemnek, hogy pontosan egy szimmetriasíkja, -tengelye és -pontja van.)

A 37. illetve a 38. elemet alkotó öt kockának van egy közös csúcsa. Egyedül a 38. elem tartalmaz két olyan közös élű kockát, amelyek nem lapszomszédok és a közös élük nem tartozik harmadik kockához.

A 24. és a 25. elem nem rakható össze különálló kockákból ragasztás nélkül.

Szóma, tetraszóma és pentaszóma

Az eddig bemutatott játékok – mint halmazok elemei – a következő diagramon ábrázolhatók:



A halmazok egyesítettje (a négy játék összevonása oly módon, hogy azonos alakzat ne legyen köztük) 38 elemet tartalmaz, ezeket összesen 180 darab egységnyi kocka alkotja.

A közös játék: válasszunk ki egy tetszőleges pentaszóma elemet (5 egység), a többi elemből állítsuk össze annak éleit tekintve kétszeres nagyítását (40 egység), a fennmaradó elemekből pedig a háromszoros nagyítását (135 egység)!

A feladatot négyféle módon oldhatjuk meg:

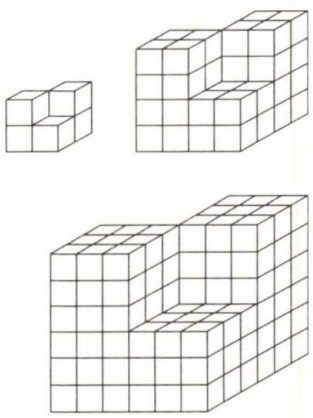
Építsük fel a kiválasztott elem kétszeres nagyítását 8 pentaszóma elemből, a háromszoros nagyítását pedig az 1. elemből, a 8 tetraszóma és 20 pentaszóma elemből!

Építsük fel a kiválasztott elem kétszeres nagyítását az 1. elemből, 3 tetraszóma és 5 pentaszóma elemből, a háromszoros nagyítását pedig 5 tetraszóma és 23 pentaszóma elemből!

Építsük fel a kiválasztott elem kétszeres nagyítását 5 tetraszóma és 4 pentaszóma elemből, a háromszoros nagyítását pedig az 1. elemből, 3 tetraszóma és 24 pentaszóma elemből!

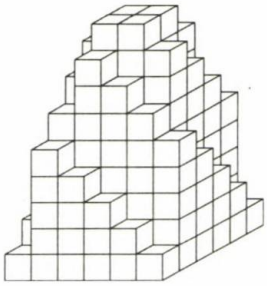
Építsük fel a kiválasztott elem kétszeres nagyítását az 1. elemből, a 8 tetraszóma és 1 pentaszóma elemből, a háromszoros nagyítását pedig 27 pentaszóma elemből!

A 38. elem nagyításai:

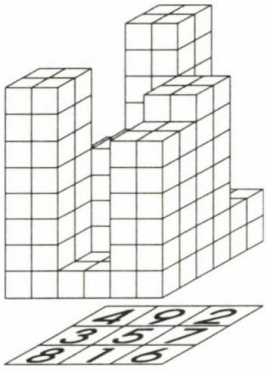


A következő két feladatban kihasználjuk az alábbi egyenlőséget:

$$180 = 4\,(1 + 2 + \ldots + 9)$$



Építsük fel az ősi kínai bűvös négyzet mezőire az azoknak megfelelő magasságú 2×2 egység alapú hasábokat!



A 180 darab egységnyi kocka által alkotott játékunkkal nem csupán tömör alakzatokat építhetünk fel. Felhasználva a

$$180 = (3^3 - 1^3) + (4^3 - 2^3) + (5^3 - 3^3)$$

összefüggést kirakhatók egyidejűleg a három, a négy és az öt egység élű kockák úgy, hogy belül üresek, azokat csak a külső kockák alkotják.

Mikroszómák

Az eddig megismert játékok elemeiből – általában valamilyen közös tulajdonság alapján – válogatva több olyan feladat is kitűzhető, melyekben három vagy négy egység élű kockát kell összeállítani.

Ezeket a játékokat *mikroszómáknak* (mikro-: kis-) nevezhetjük. Úgy a 27, mint a 64 egység térfogatú kocka felépítése három módon lehetséges.

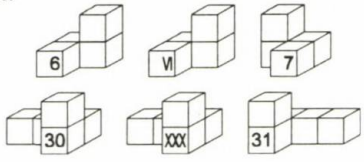
A három egység élű kockát kirakhatjuk
- az 1. elem és hat négy egységnyi elem (ilyen a szóma alapfeladata);
- az 1. elem, egy tetraszóma és négy pentaszóma; valamint
- három tetraszóma és három pentaszóma elem segítségével.

A négy egység élű kocka
- az 1. elem, négy tetraszóma és kilenc pentaszóma elem; vagy
- egy tetraszóma és tizenkét pentaszóma; illetve
- hat tetraszóma és nyolc pentaszóma elem felhasználásával állítható össze.

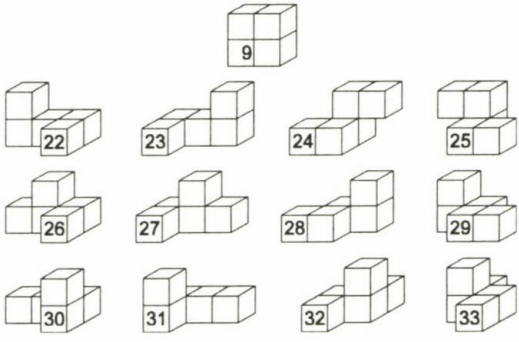
Nézzünk ezekre egy-egy példát!

A LESK nevéhez fűződő feladatban a 6. és a 30. elem kétszer szerepel, ezek másolatait római számokkal jelöltük (VI. és XXX. elem).

Építsük fel a három egység élű kockát a 6., a VI., a 7., a 30., a XXX. és a 31. elem segítségével!



Építsük fel a négy egység élű kockát az alábbi elemek felhasználásával: 9., 22-33.!



Homoszómák

Az N egység élű kocka összeállításához $N \times N$ darab N egységnyi kockát tartalmazó egyforma elem szükséges. Ezeket a játékokat *homoszómáknak* (homo-: egynemű-) nevezzük.

A szabályos elemekből fölösleges homoszómát alkotni, hiszen a feladat megoldása teljesen egyértelmű lenne.

A legkisebb szabálytalan alakzat, a három kockából összeillesztett 1. elem nem kínál magától értetődő megoldást, mert a három egység élű kocka építése során gyakran esünk abba a hibába, hogy teljesen lefedjük a második réteget, de egy réteg már nem rakható ki az elemekből.

A hármas homoszóma alapfeladata:

Állítsuk össze az 1. elemből és a vele azonos további nyolc elemből a három egység élű kockát!

A szóma négy egységnyi elemei – egy kivételével – alkalmatlanok a homoszómához. Két darab 2. elemből a $4 \times 2 \times 1$, négy darab 3. elemből a $4 \times 4 \times 1$ egységnyi téglatest, két-két darab 5., 6. illetve 7. elemből pedig a két egység élű kocka állítható össze, s az összeállításokat ismételve, azokból könnyedén felépíthető a négy egység élű kocka. (Természetesen még inkább igaz ez a tetraszóma két szabályos, 8. és 9. elemére.)

Nem egyértelmű a feladat megoldása a 4. elem esetében:

A négyes homoszóma alapfeladata:

Állítsuk össze a 4. elemből és a vele azonos további tizenöt elemből a négy egység élű kockát!

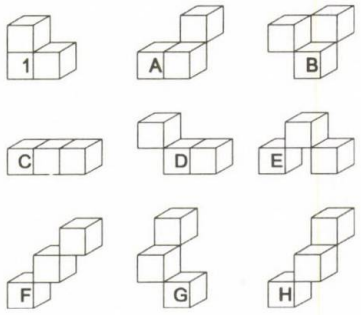
Az ötös homoszómák áttekintése már korántsem egyszerű feladat. A pentaszóma szabályos 10. eleme természetesen egyértelmű megoldást adna, ez azonban még a hagyományos építőkocka-készletek között sem lenne túl izgalmas játék. Könnyen belátható az is, hogy a 21. elem alkalmatlan homoszómának, mivel a kocka csúcsai sehogy sem tölthetők ki vele anélkül, hogy abból valamelyik irányba ne lógjon ki.

Bouwkamp és Klarner amerikai matematikusok a pentaszóma 14. elemét vizsgálták, s meghatározták azokat a téglatesteket, amelyeket legfeljebb 25 azonos elemmel ki lehet tölteni. Ezek közül a legkisebb a $10 \times 5 \times 1$ egység élű hasáb.

Az ötös homoszóma alapfeladata a 14. elemből és a vele azonos további huszonnégy elemből az öt egység élű kocka összeállítása.

Triszóma

Utolsó játékunk annyiban tér el az összes többitől, hogy az elemeket alkotó egységnyi kockák nemcsak lapjaikkal, hanem éleikkel is kapcsolódhatnak egymáshoz. Rubik Ernő egy olyan változatot javasol, amelyben három azonos kocka a fenti feltételek mellett illeszkedik egymáshoz. A *triszómát* (tri-: három-) összesen kilenc elem alkotja, a feladat pedig a három egység élű kocka felépítése:



Irodalom

[1] Bakos Tamás: Térkitöltő geometriai játékok. Poliominok. JÁTÉK 8., Rubik Nemzetközi Játékmagazin, 1983. 4. szám.

[2] V. N. Bolhovitinov - B. I. Koltovoj - I. K. Lagovszkij: Furfangos fejtörő feladatok. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1989., Mir Könyvkiadó, Moszkva.

[3] Hasznos mulatságok... Társasjátékok. Népművelési Propaganda Iroda, 1971.

[4] Lukácsy András: Játszd újra! A világ 100 alapjátéka. Budapest, 1988.

[5] Megismételhető-e a bűvös kocka sikere? Az Élet és Tudomány kalendáriuma, 1982.

[6] Minimális művészet. Interpress Magazin, 1981. január (A Scientific American 1978. novemberi száma nyomán).

[7] Rubik Ernő: A bűvös kocka. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1981.

[8] Donald D. Spencer: Játékok BASIC nyelven. Számítástechnikai-alkalmazási Vállalat, Budapest, 1983.

[9] Vargha Balázs: Játékkoktél. Minerva, Budapest, 1967.

[10] Végh Gyula: SZÓMA. Térbeli összerakó játékok feladatokkal, megoldásokkal és színes modellekkel. Mozaik Oktatási Stúdió, Szeged, 1994.

Simonovits András

Röviden a nem kooperatív játékelméletről

1. Bevezetés

Az 1994. évi közgazdasági Nobel-díjat három kutató, *Harsányi János*, *John Nash* és *Richard Selten* kapta a nem kooperatív játékelmélet területén végzett teljesítményükért. Ebben a rövid ismertető cikkben [6] 11. fejezet alapján áttekintjük, hogy mi a nem kooperatív játékelmélet, és mit alkotott a három díjazott.

2. A nem kooperatív játékelmélet normálfeladata

Az egyszerűség kedvéért mindvégig két játékosra szorítkozunk. Legyen A_1 és A_2 két véges halmaz: a két játékos stratégiáinak halmaza; melyek általános elemei a_1 és a_2: a két játékos *stratégiái*. (Döntés helyett stratégiáról írunk, mert többlépéses döntéseket is megengedünk.) A két játékos egymástól függetlenül dönt (nem kooperál), s hasznuk $\pi_1(a_1, a_2)$ és $\pi_2(a_1, a_2)$ valós szám. Mindkét játékos saját hasznosságfüggvényét akarja maximalizálni, de az függ a másik döntésétől is. Föltesszük, hogy mindkét játékos mindent tud a másik lehetőségeiről és érdekeiről, csupán konkrét döntését nem ismeri előre. Neumann és Morgenstern (1944) foglalkozott először rendszeresen ilyen játékelméleti feladatokkal, bár Neumann első játékelméleti cikke 1928-ból származik.

Nash tiszteletére azt mondjuk, hogy a két játékos (a_1^*, a_2^*) döntéspárja *Nash-egyensúlyt* alkot, ha egyiknek sem érdemes egyoldalúan eltérni a döntéspárban szereplő döntésétől. Képletben:

$\pi_1(a_1^*, a_2^*) \geq \pi_1(a_1, a_2^*)$ tetszőleges $a_1 \in A_1$-re

és

$\pi_2(a_1^*, a_2^*) \geq \pi_2(a_1^*, a_2)$ tetszőleges $a_2 \in A_2$-re

A következőkben három fontos példát mutatunk be, három fontos következménnyel.

3. A foglyok dilemmája és az egyensúly szuboptimalitása

Az amerikai rendőrség letartóztat két gyanúsítottat, akik együtt követtek el egy bűnt, de nincs rá elegendő bizonyíték. A két foglyot elkülönítik egymástól, és elkezdik őket vallatni. Amerikai szokás szerint, ha valamelyik gyanúsított vall (és a másik nem), akkor az „éneklő" szabadlábra kerül és jutalmat kap: nyereménypár: (3, –3) vagy (–3, 3). Ha mindkettő tagad (kooperál), akkor szabadlábra kerülnek, jutalom nélkül, nyereménypár: (2, 2). Ha mindkettő „köp", akkor mindketten börtönbe kerülnek, de mindketten jutalmat kapnak, nyereménypár: (–2, –2).

Érdemes a fenti adatokat az ún. *kifizetési mátrixba* rendezni:

2. bűnöző / 1. bűnöző	Köp	Tagad
Köp	(–2, –2)	(3, –3)
Tagad	(3, –3)	(2, 2)

Mielőtt meghatároznánk a Nash-egyensúlyt, bemutatunk egy fogalmat, melynek segítségével bizonyos döntéseket egyszerűen kizárhatunk a jó döntések köréből. Azt mondjuk, hogy a_1^* *gyengén dominálja* a_1'-t, ha akármilyen $a_2 \in A_2$ döntés esetén a_1^* legalább olyan jó, mint a_1'. Képletben: $\pi_1(a_1^*, a_2) \geq \pi_1(a_1', a_2)$ tetszőleges $a_2 \in A_2$-re.

Erős dominancia esetén legalább egy a_2-re határozott egyenlőtlenség áll. Nyilvánvaló, hogy erősen dominált stratégiák kihagyhatók. Hasonlóan definiálható a második játékosra a dominancia.

Ha a foglyok együttműködnének egymással, akkor jól járnának: (2, 2), de mindkettő

még jobban jár, ha csak ő köp. Valóban, a tagadást dominálja a köpés: p_1. az 1. játékos szempontjából, ha 2. köp, az 1. tagadása rosszabb a köpésénél ($-3 < -2$); ha 2. tagad, az 1. tagadása rosszabb a köpésénél ($2 < 3$). Tehát csak a köpés marad, s ez Nash-egyensúly, ez azonban nem optimális.

Példánk végére érve, megjegyezzük, hogy a játékelmélet művelői szeretik ilyen frivol példákon megfogalmazni a problémákat, de azért vannak fontos alkalmazások. Gondoljunk az OPEC-re, s az egyszerűség kedvéért legyen az egyik játékos Szaud-Arábia, a másik pedig a többi tagország. A döntés az, hogy együttműködnek-e a termelés visszafogásában (s akkor magas olajárat érhetnek el) vagy sem. Az igazi OPEC-optimum az lenne, ha mindkét fél visszafogná a termelését. Mivel nem bíznak meg egymásban, mindkét fél abban reménykedik, hogy a másik visszafogja a termelését és ő pedig kihasználja az így adódó kedvező lehetőségeket. A valódi helyzet bonyolultabb, de az elmélet valamilyen magyarázatot ad a tényleges folyamatokra.

4. Forintpárosítás és kevert stratégiák szükségessége

Két játékos a másik számára láthatatlanul elhelyez 1-1 Ft-ot Fejre vagy Írásra. Ha azonost választanak, az 1. nyer, ha különbözőt, akkor a 2, mindkétszer 1 Ft-ot.

2. játékos / 1. játékos	Fej	Írás
Fej	(1, −1)	(−1, 1)
Írás	(−1, 1)	(1, −1)

Belátható, hogy ebben a játékban nincs Nash-egyensúly. Neumann Jánostól származik az ötlet, hogy az eddigi *tiszta* stratégiák mellé *kevert* stratégiákat kell bevezetni, ahol a választás többé-kevésbé a véletlenen alapszik. Legyen P_i egy valószínűségeloszlás az i. játékos döntéshalmazán. Legyen $p_i(a_i) \geq 0$ valós szám az a_i stratégia választásának a valószínűsége, $\sum_{a_i \in A_i} p_i(a_i) = 1$, $i = 1, 2$, melyet a két játékos egymástól függetlenül választ. Ekkor az i. játékos nyereményének várható értéke függ P_1 és P_2 valószínűségeloszlásoktól:

$$\pi_i(P_1, P_2) = \sum_{a_1 \in A_1} \sum_{a_2 \in A_2} p_1(a_1) p_2(a_2) \pi_i(a_1, a_2), \quad i = 1,2.$$

Most a Nash-egyensúly a kevert stratégiákra is definiálható. Nash tétele szerint *feltételeink mellett kevert Nash-egyensúly mindig létezik.*

Visszatérve a forintpárosításra: Belátható, hogy egyetlen kevert Nash-egyensúly létezik: $p_i(\text{F}) = \frac{1}{2}$, $i = 1, 2$. Azaz, mindkét játékos földobja a saját pénzét, és ahogy esik, úgy pufan. Ekkor mindkét játékos várható nyeresége 0. Ha azonban az 1. játékos eltér e szabálytól, pl. $p_1(\text{F}) > \frac{1}{2}$, akkor a 2. játékos ezt kihasználhatja, s mindig I-t tesz: $p_2(\text{F}) = 0$, tehát az érmék különbözőségének valószínűsége $\frac{1}{2}$-fölé kerül.

5. A nemek harca és az egyensúly többértelműsége

A Fiú és a Lány szeret együtt lenni, de a Fiú meccsre menne, a Lány moziba. A fizetési mátrix most a következő:

Lány (2) / Fiú (1)	meccs	mozi
meccs	(3, 2)	(1, 1)
mozi	(1, 1)	(2, 3)

Belátható, hogy mind a (meccs, meccs), mind a (mozi, mozi) tiszta Nash-egyensúly, sőt a Fiú $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ és a Lány $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ kevert döntése kevert Nash-egyensúly.

Felvetődik a kérdés: A résztvevők melyiket választják a három egyensúly közül? Mint szerelmespárok hogyan koordinálják a választást? (Hogy ne a lány menjen a meccsre és a Fiú a moziba!)

6. Dinamikus játékok és (aljáték-)tökéletes egyensúly

Tegyük föl, hogy a következő játékot időben játsszák:

	N1			
	Left (bal) N2		Right (jobb) N2	
	l	r	l	r
π_1	2	2	1	3
π_2	0	−1	0	1

Először N1 lép balra vagy jobbra, majd N2 balra vagy jobbra. A négy lehetséges eset fizetési párjai az utolsó két sorban láthatók. A hagyományos Nash-felfogás szerint N1 nem lép jobbra, mert ebben az esetben N2 balra lépne, s N1 biztos 2 egységnyi nyereségét lerontaná 1 -re. Vagyis a Nash-egyensúly ekkor Ll, a kifizetés (2, 0).

De mégis tegyük föl, hogy N1 jobbra lép. Ekkor N2 fenyegetése hiteltelenné válik: ha menteni akarja a menthetőt, akkor jobbra lép, (1 > 0), és N1 besepri a maximális 3 egységnyi nyereséget.

Selten (1975) alapötlete az volt, hogy *tökéletes egyensúlyokra* kell összpontosítani, amelyekben nincs hiteltelen fenyegetés. Ezzel az eszközzel számos Nash-egyensúlyt kizárhatunk az igazi egyensúlyok köréből.

Lássunk most egy gyakorlati példát a hiteltelen fenyegetés beváltására, ahol feladatunk gondolatmenete megbicsaklik! 1982-ben Argentína katonai erővel elfoglalta a Nagy-Britanniához tartozó Falkland szigeteket. Feltehetően úgy számolt, hogy Nagy-Britanniának nem éri majd meg bosszút állni. Nem ez történt: Thatcher asszony kormánya visszavágott, és a sziget értékét messze meghaladó áron visszafoglalta a szigeteket. Valószínűleg a kifizetési mátrixba bele kellett volna vennünk további tényezőket: Thatcher újjáválasztási esélyeinek ugrásszerű megjavulását, Kína fenyegetését Hong Kong elfoglalására, stb.

7. Bizonytalan információjú játékok és a bayesi egyensúly.

A legegyszerűbb esetben legyen két játékosunk, akik egyidőben lépnek. N_i típusa $t_i \in T_i$, amely befolyásolja pl. a nyereségét. N_i ismeri saját típusát, de N_j nem ismeri P_i típusát, $j = i$, de ismeri a típus $p(t_j \mid t_i)$ feltételes valószínűségi eloszlását.

A következő vicc szolgáljon szemléltetésül. Kovácsot elmegyógyintézetbe zárják, mert azt hiszi, hogy egér, s fél a macskáktól. Meggyógyítják, majd kieresztik a kórházból. A kapuban találkozik egy macskával és földbegyökerezik a lába. A kísérő orvos rárivall: De hiszen tudja, hogy maga nem egér! Mire Kovács azt válaszolja: Én tudom, de vajon a macska tudja-e?

Harsányi (1967/68)-tól származik a bizonytalan információjú játékok első megoldása az ún. bayes-i egyensúly alapján. N_i olyan a_i döntést hoz (amely most már lehet kevert döntés is), amely Nash-értelemben maximalizálja nyeresége feltételes várható értékét:

$$\sum p(t_2 \mid t_1)\pi_1(a_1^*(t_1), a_2^*(t_2), t_1, t_2) \geq$$
$$\geq \sum p(t_2 \mid t_1)\pi_1(a_1(t_1), a_2^*(t_2), t_1, t_2)$$

és

$$\sum p(t_1 \mid t_2)\pi_2(a_1^*(t_1), a_2^*(t_2), t_1, t_2) \geq$$
$$\geq \sum p(t_1 \mid t_2)\pi_2(a_1^*(t_1), a_2(t_2), t_1, t_2).$$

Példát hozunk bayesi egyensúlyra. N1 típusa ismert, N2-é $\frac{1}{2}$–$\frac{1}{2}$ valószínűséggel lehet t_2 és t_2'. N1 léphet föl (Up) és le (Down), P2 léphet balra (Left) vagy jobbra (Right). A fizetési mátrix most a következő:

Típus	t_2		t_2'	
N2 / N1	L	R	L	R
U	(3, 1)	(2, 0)	(3, 0)	(2, 1)
D	(0, 1)	(4, 0)	(0, 0)	(4, 1)

Vegyük észre, hogy N1 nyereménye csupán attól függ, hogy mit választ (ő és) N2, de független N2 típusától. Mindkét típusú N2-nek van domináns stratégiája: t_2 L-et választja, t_2' R-et. Ezért a helyzet olyan, mintha N1 ellenfele egyforma valószínűséggel játssza L-et és R-et. Ezért N1 nyeresége U esetén $\frac{3+2}{2} = 2{,}5$, D esetén $\frac{0+4}{2} = 2$, azaz $a_1^* = \text{U}$.

A megoldás tetszetős, de korántsem problámátlan: Ugyanis minden döntés racionalizálható, azaz Nash-egyensúlynak tekinthető bizonyos bayesi-feltételezésekkel.

8. Befejezés

Ismertetésünk végére értünk. Reméljük, hogy a bemutatott játékok és megoldások kedvet csináltak ahhoz, hogy további játékokkal ismerkedjünk meg.

Irodalom

[1] Harsányi, J. (1967-69) „Games with Incomplete Information Played by Baysian Players", Management Science 14 : 159-182, 320-334 és 486-502.

[2] Nash, J. (1950) „Equilibrium points in N-Person Games", Proceeding of the National Academy of Sciences, 36 : 48-49.

[3] Neumann, J. - Morgenstern, O. (1944) Theory of Games and Economic Behavior, Princeton, Princeton University Press.

[4] Selten, R. (1975) „Reexamination of the Perfectness Concept for Equilibrium Points in Extensive Games", International Journal of Game Theory 4 : 25-55.

[5] Szép, J. és Forgó, F. (1972) Bevezetés a játékelméletbe, Budapest, KJK.

[6] Tirol, J. (1989) The Theory of Industrial Organization, Cambridge, MA, MIT Press.

Zsuffa Lajos

Jónás Márton (1895-1987)

Száz éves lenne Jónás Márton, a tankönyvíró tanár, a nagyhatású nevelő, a sajátos egyéniségű ember, aki ma már pedagógusként csak az ötvenen felüliek, tankönyvíróként pedig csak a hatvanon felüliek emlékezetében él.

A Nógrád megyei Kislibercsen született 1895. december 13-án. Az uradalmi gazdatiszt édesapa öt gyermeke között ő volt sorrendben a harmadik. Szarvason járt gimnáziumba és ott is érettségizett. Budapesten a Pázmány Péter Tudományegyetemen végezte el a matematika-fizika szakot, miközben megjárta az I. világháború poklát, s fejlövést kapott. A golyót élete végéig hordta. Tanulmányai alatt helyettes óraadóként Aszódon tanított. A kiskunhalasi Református Gimnáziumban 1918. szeptember 1-jén nevezték ki helyettes tanárnak. Oklevelét 1920. május 26. napján állították ki, és ugyanez év szeptember 1-jén rendes tanárként véglegesítették. Egész életében „csak vidéki tanár" maradt.

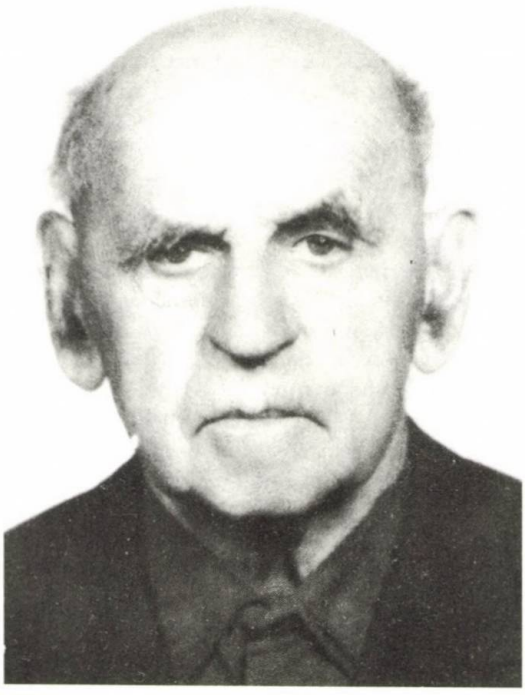
A 30-as években új tanterv bevezetésére készültek. Az erről folyó vita tölti ki – részben – a korabeli didaktikai szaksajtót. Jónás Márton is kifejti nézeteit a Protestans Tanügyi Szemlében az ideális mennyiségtani tankönyvről (VII/1933, 31-32) és a tanulói gyakorlatok szerepéről a fizika tanításában (VIII/1934, 193-197). Megteszi ezt az akkor Mezőtúron tanító Rédei László, a későbbi kétszeres Kossuth-díjas nemzetközi hírű egyetemi tanár is, gondolataik szinte rímelnek. („... ne akarjuk mindenkor és mindenáron az átlagtanulóval a miniatűr-zseni szerepét eljátszatni", int Rédei.) Jónás mintegy 15 tanévnyi tapasztalatát összegezve arról ír, hogy általában elfogadott tény, miszerint a tankönyvek példatára elég jó.

Viszont rossznak mondanak minden mennyiségtani könyvet, az első osztályostól egészen az analitikus geometriáig és a differenciálszámításig azért, mert mindenki azt szeretné látni a tankönyvben, ami tanári egyéniségének és tanítási módszerének megfelel. El kell tehát hagyni mindazokat a részeket, amelyeket a szerzőjén kívül mindenki rossznak mond. Ellenben meg kell hagyni mindazt, amit mindenki jónak tarthat, vagyis az ideális mennyiségtani tankönyv: a jól összeállított példatár.

„Abban bizonyára minden szaktanár egyetért, hogy tanításunk gerince a példadolgoztatás. Én egy fél lépéssel tovább megyek és azt mondom, hogy ezen az egyen kívül minden más felesleges is... Az 'ideális tankönyv' is

csak akkor ideális, ha olyan tanár tanít belőle, aki a magyarázgatás kanyargós ösvényéről rá mer lépni a szakadatlan példadolgoztatás nyílegyenes mesgyéjére."

A szeghalmi tanár és igazgató, Nagy Miklós, aki a fizikatankönyvek szerzője lesz, magáévá teszi Jónás nézeteit: „A matematikai tankönyvek szerkesztésére vonatkozólag megvalósításra alkalmas javaslata van Jónás Márton kiskunhalasi kollégának, aki minden osztály részére egészen rövid és olcsó tankönyv készítését tartja jónak, s a tankönyvek mellé az összes osztályokon keresztül használható, bő és változatos feladatgyűjtemény összeállítását kívánja". (A korabeli pedagógiai-didaktikai szaklapokat böngészve feltűnő, hogy a hat évtized alatt bekövetkezett gyökeres változások ellenére az oktatásügy fő problémái változatlanok maradtak. Említésre méltó érdekesség, hogy egy 1937-ben megjelent cikk vitába száll azzal a nézettel, mely szerint „a református iskolák csak abban különböznek az államiaktól, hogy a hitoktatót vallástanárnak nevezik".)



Az 1934-ben elfogadott és 1938-ban bevezetett új tantervhez új tankönyvek kellettek, bár sok esetben a régieket dolgozták át. A Borosay Dávid által írott, a katolikus és az állami gimnáziumokban használt matematikatankönyveket Holenda Barnabás győri és Korányi Szevér kőszegi bencésrendi tanárok igazították az új tantervhez. Az új tankönyv írásánál nem volt elhanyagolható szempont a tankönyvek ára. Előzetes számítások szerint egy oldal előállítása 5-7 fillérbe került. Ezért is voltak rövidek akkoriban a tankönyvek. A Jónásféle tankönyveket 5 pengő körüli összegért árulták. Igaz, akkoriban a diákok felsőbb osztályos társaiktól vették, a szegénysorsúak pedig az iskolai segélykönyvtártól kaphatták tankönyveiket. A halasi gimnázium 1941-es évkönyvében megjelent statisztika szerint a tanulók szülei 16,6 %-ának 100 pengő alatt, 32,7 %-ának pedig 100 pengő és 200 pengő között volt a havi jövedelme. Abban az időben az úriemberek keresete más kategóriába tartozott, az érettségi pedig potenciálisan az úriemberek sorába emelt. A szabad értelmiségiekhez képest gyengén kereső gimnáziumi tanárok fizetését részletesen taglalja a Gimnáziumi Tanári Zsebkönyv (1942.). Egy gimnáziumi tanár 20-22 év szolgálat után pl. havi 400 pengő fizetést élvezett, nem dolgozó feleség és első két gyermek után 40-40 pengő, azaz összesen 120 pengő családi pótlék járt, amely az ötödik gyermek után már 70 pengőre rúgott, ezenkívül szolgálati helytől és a család nagyságától függően 60-120 pengő lakáspénzt is kapott, meg persze 50 %-os MÁV arcképes igazolványt. A korra jellemzően egy altisztnek (ma: hivatalsegéd) csak 25-25 pengő, ötödik gyermek után csak 40 pengő családi pótlék jutott.

Más oka is volt Jónás Mártonnak a rövid könyvek írására: saját vidéki tanári tapasztalata. A protestáns gimnáziumok zömmel mezővárosokban, községekben működtek: Aszódon, Csurgón, Gyönkön, Karcagon, Kisújszálláson, Kunszentmiklóson, Mezőtúron, Orosházán, Szarvason, Szeghalmon, hogy csak néhányat említsünk. Sok volt a tanyasi kisdiák, aki életében nem hallott rádiót, nem látott villamost, nem ült autóban, autóbuszban, talán vonaton sem, a villanyt, a vízvezetéket, az angol WC-t akkor ismerte meg, amikor gimnáziumba adták. Környezetében a felnőttek nem csevegtek filozófiáról, művészetről, közgazdaságtanról és általában absztrakt fogalmakról, ő maga viszont szűk szókinccsel, helytelen magyarsággal beszélt, az elemista olvasókönyvön

kívül legfeljebb bibliát és kalendáriumot látott. Bár az etnomatematika fogalmát akkor még nem találták ki, Jónás Márton tapasztalatból és a józan ész alapján tudta, hogy az ilyen szerény élményanyaggal rendelkező diák számára egyszerű nyelven, röviden kell tiszta gondolatokat közölni. (És az élménygazdag nevelésben részesült kis zsenikhez hogyan szóljunk? Ugyanígy!)

Amikor tankönyvét írta, sok volt a magántanuló. A vidéki fiúgimnáziumban a lányok csak magántanulók lehettek, nem feleltek, és az év végén magánvizsgát kellett tenniük. Ugyancsak magánúton tanult sok olyan felnőtt, akinek állásbeli előmeneteléhez szükségeltetett 4 középiskolai (gimnázium vagy polgári), esetleg ennél is több osztály elvégzése. Nem láthatta előre, hogy a háború végén és után rengetegen fognak magánvizsgák letételére kényszerülni. Maurer Gyula, a Miskolci Egyetem nyugalmazott matematika professzora VII. gimnazista korában sokat betegeskedett, de Kolozsvárott, Jónás tankönyvéből élvezettel tanulta a matematikát. Így nem csoda, hogy a következő 1944/45-ös tanévben a VIII.-os Jónás könyvet vitte magával a háborúba, a fogságba.

Szakmai ismertsége és elismertsége alapján nem meglepő, hogy ő kapott megbízást a református gimnáziumok számára készülő mennyiségtan tankönyvek megírására. Tankönyveit az Országos Evangélikus Tanáregyesület is elfogadta. Ismert, hogy fizikából is kész elképzelése volt tankönyvek írására, sőt saját, soha meg nem jelent könyvei alapján tanította a negyvenes években a fizikát. Érthető viszont, hogy nyolc matematika-tankönyv rövid határidejű megírása mellett nem őt bízták meg további három fizikatankönyv egyidejű megírásával (akkoriban természettant csak a III., VII., és VIII. osztályban tanítottak). Így aztán a református gimnáziumok számára írt három fizikatankönyv a szeghalmi Nagy Miklós és a szegedi állami gimnáziumi tanár, Dombi Béla közös munkája lett.

Az 1938/39-es tanévre egyszerre jelent meg négy tankönyve az alsó négy gimnáziumi osztály számára, majd fokozatosan a többi, 1942-ben a VIII. osztályos tankönyv zárta a sort. Teljesítményét akkor értékelhetjük igazán, ha figyelembe vesszük, hogy közben teljes óraszámban tanított. (Az 1938/39-es halasi gimnáziumi évkönyv azt is megemlíti, hogy „a püspök úr megbízásából meglátogatta a budapesti Református Gimnázium mennyiségtani és természettani tanítását.")

Könyvei tükrözik tanári stílusát. Rövid bevezető feladat(ok) után a szintén rövid, de a teljesség igényével feldolgozott elméleti rész, majd jól kiválasztott, bőséges feladatanyag következik. Pontosan, csiszoltan, szép magyarsággal fogalmaz, egyszerű és áttekinthető mondatokban. A III.-os könyve mindössze 91 oldal, (szemben a Borosay–Holenda könyv 136 és Mérey Gyula könyvének 160 oldalával), a VI.-os könyv (mértani sor, logaritmus, kamatszámítás, trigonometria) 120 oldalas.

Leghosszabb a VIII.-os tankönyv, amely példatárral és érettségi előtti ismétlő fejezetekkel együtt is csupán 207 oldal.

Tankönyvírói munkásságának összehasonlító elemzése e helyt nem lehet célunk, így csak a tankönyvek néhány fejezetének bírálatára szorítkozunk. A tankönyvek tartalmát, tárgyalási sorrendjét és ezen keresztül a feldolgozás módszerét alapvetően meghatározta a tanterv. Akkoriban pl. a vektorok tanítását a fizikához sorolták, a matematika tanításánál (trigonometria, analitikus geometria, komplex számok) nem is használhatták a vektorokat. A VI.-os könyv trigonometria fejezetében igen egyszerű bizonyítást ad a $\sin(\alpha+\beta)$ kifejtésére. Az $\alpha+\beta$ szög közös szárára merőlegest állít, az így előállt nagy háromszög területét a két derékszögű háromszög területének összegeként írja fel. Innen már egyszerű egyenletrendezéssel adódik a kívánt összefüggés. Ezután a $\cos(\alpha+\beta)$ kifejtését a $\sin(\alpha+\beta)$ ismeretében határozza meg. Ennek az egyszerű bizonyításnak ára van: csak az $\alpha+\beta<180°$ esetében érvényes. Ezen úgy próbál segíteni, hogy előzőleg csak 180°-ig terjeszti ki a szögfüggvények értelmezését; a szögfüggvények fogalmának egységsugarú körben való értelmezését csak jóval később tárgyalja, de a trigonometrikus összeg- és félszögképletek érvényességének kiterjesztésére már nem tér ki.

A trigonometriai fejezetben szerepel az azóta feledésbe merült tangenstétel. A tan-

genstétel lényegében átalakított szinusztétel, amely alkalmas az általános háromszögben a két oldal és a közbezárt szög ismeretében a további szögek meghatározására. Előnye az, hogy a koszinusztétel elkerülésével logaritmusos számolással kiszámítható $\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}$, ahol α és β a két ismeretlen szög.

Ezután α és β, az $\alpha+\beta=180°-\gamma$ összefüggés segítségével könnyen meghatározható.

Jogos kritika illetheti a határérték és az arra épülő további fogalmak tárgyalását. Az analízis elemeinek nem precíz tárgyalása közös hibája valamennyi középiskolai, sőt a nem matematika szakos hallgatóknak írt egyetemi tankönyveknek is. Minél rövidebben fejti ki egy könyv a differenciál- és integrálszámítást, annál több benne a pongyolaság, a heurisztikus fogalomalkotás. Az a vita, hogy tanítsunk-e egyáltalán differenciál- és integrálszámítást, ha azt nem tehetjük precízen, mára eldőlt: akik mérnöknek, közgazdásznak, fizikusnak, kémikusnak stb. készülnek, azoknak szükségük van az analízis által nyújtott apparátusra. Időhiány miatt azonban nemcsak Magyarországon, hanem világszerte nem egzakt fogalmakkal, nem precíz bizonyításokkal tanítják az analízist az ilyen hallgatók számára.

Mai szemmel nézve is korszerű Jónás könyvében a komplex számok bevezetése, amit középiskolai fokon absztrakt algebrai szigorral tesz, lényegében deduktíve: a sík számpárain értelmez összeadást és szorzást. A számpárok – nagyonis létező fogalmak –, lesznek a komplex számok. Rédei professzor is így vezette be a komplex számokat egyetemi előadásain. A Borosay–Holenda könyv a komplex számokat a gyökök és együtthatók közötti összefüggésen keresztül, míg ugyanezen könyv Králik Dezső és Surányi János által történt átdolgozásában a szimmetrikus függvényekkel való motivációval vezeti be. Történt ez annak ellenére, hogy Jónás Mártonnak nem sok fogalma lehetett az absztrakt algebráról, amikor egyetemre járt. A Steinitz-féle izomorfia elv már néhány éve ismert volt ugyan, de az Emmy Noether-féle absztrakt algebra kidolgozása csak a huszas években kezdődött meg; Magyarországon először Rédei László oktatott absztrakt algebrát a 40-es évek végétől.

Kár, hogy tankönyvei csak rövid ideig hathattak, mert az államosítás után egy évvel, 1949-ben kivonták őket a forgalomból.

Jónás Márton a fizika tanítása terén is modern elveket vallott és valósított meg. A fizikában használt tanítási elemeknek, nevezetesen a magyarázatnak, a kísérletnek, a szemléltetésnek, a számonkérésnek, a példadolgoztatásnak az egyensúlyát hirdette, de már 1928-tól kezdve felhívja a tanulói fizikai gyakorlatok jelentőségére a figyelmet akkor, amikor a „tanulói gyakorlatoknak tanítási elem gyanánt való felhasználása még az erjedés stádiumában van". A tanulói gyakorlatok általa megvalósított formáiról írt a halasi gimnázium 1928/29-es és 1930/31-es évkönyveiben, valamint a Protestáns Tanügyi Szemle 1934. évi kötetében.

Szikár, ötven év körüli ember kapált egy szál gatyában, csurgóra állított kalapban a halasi református temetőből kialakított gyümölcsösben, a vasútállomásról a városba vezető forgalmas utca mentén. Napszámosnak nézhette őt akárki, amint a II. világháború után az egyháztól fizetés helyett kapott földecskéjét művelte. Így láthatták gyakran a református Szilády Áron Gimnázium országos hírű matematika-fizika szakos tanárát, Jónás Mártont. Annyi még megmaradt a háború előtti úrivilágból, hogy a vidéki kisvárosban nagy tekintélynek örvendő gimnáziumi tanárok inkább másokkal műveltették illeményföldjüket. Kivéve Jónás Mártont, aki nem restellte a fizikai munkát, különben sem neki kellett szégyenkeznie, amiért tanári foglalkozásából nem tudta eltartani családját. Tekintélyét sem féltette, mert ő abszolút tekintély volt.

Egykori tanítványai rendkívül igazságos embernek ismerték, ennek és nem csupán tanári munkájának köszönhette népszerűségét.

Tisztelve szerették, és megbíztak benne a diákok, annak ellenére, hogy sokan féltek tőle. A népszerűséghajhászás távol állott tőle, mogorvának tűnő modorán átsugárzott az emberség, a szeretet. Amikor 1946 és 1948 között létezett diákönkormányzat, a diákok őt választották tanár-elnöknek. Kizárólag Tanár Úrnak szólították, csak a háta mögött Marci bácsiz-

ták, vagy Murci bácsizták, utalva „karcos" modorára. Nyílt, egyenes jellemű ember volt, az udvariaskodás, bájolgás nem tartozott tulajdonságai közé. A halasi tanári kar természetesen különböző egyéniségekből állt, mégis valamennyien beleillettek abba képbe, amilyet egy vidéki tanárról elképzelünk, Jónás Márton nagy formátumú karaktere azonban nehezen illett ebbe. Tette a dolgát, nem törődve konvenciókkal, kétes értékű elvárásokkal.

Szigorú tanár volt, egyik szemöldökének felhúzásával egy egész osztályt tudott fegyelmezni. Óráin nagyobb gondot fordított a tiszta, szabatos beszédre, mint egy magyartanár. A gondolatot pontosan tükröző beszédet követelt, nem tűrte a pongyolaságot, még kevésbé a szószátyárkodást. Lassan, tagoltan magyarázott öblös hangján, szinte szófukar volt, de minden szava ült. Kristálytiszta logikája magával ragadta tanítványait.

Templomba ritkán járt, jószerével csak akkor, ha a református diákok kíséretére volt kirendelve. Ilyenkor mindig a diákok közt, hátul foglalt helyet, ellentétben sok tanár kollégájával, akik a presbiteri padokban mutatták magukat hétről-hétre. Az államosítás után, 1948 őszétől a tanárok eltűntek a presbiteri padokból, Jónás Márton azonban továbbra is el-eljárt nagyobb ünnepkor a templomba, és leült a diákok közé. Kompromittálhatatlan jellem volt, úgy viselkedett, ahogyan az szigorú etikai mércéjének megfelelt, nem akart ő tetszeni sem a diáknak, sem feletteseinek, sem a mindenkori hatalomnak.

Ez utóbbi 1949-ben megbocsáthatatlan vétek volt, szeptember elsejével a néhány éve alapított celldömölki Berzsenyi Dániel Gimnáziumba helyezték, matematika-fizika szakos tanár nélkül hagyva a halasi gimnáziumot.

Celldömölkön is hamar köztiszteletben álló tanár lett. Eredményes munkáját többek közt az is bizonyítja, hogy 1952-ben és 1953-ban a megyéből csak celldömölki diákok jutottak be a Rákosi Mátyás Tanulmányi Verseny (ekkor így hívták az Országos Tanulmányi Versenyt) döntőjébe. Munkája elismeréseként 1954-ben az oktatásügy kiváló dolgozója lett.

Halasi házát felszámolva Celldömölkön albérletben illetve társbérletben lakott. Halasi házának ára elment gyermekei egyetemi tanítatására. Tisztességes lakáshoz csak élete alkonyán, 1984-ben jutott újra.

1949. szeptember 1-jétől tanárként, 1954-től igazgatóként dolgozott a celldömölki gimnáziumban, 1957. március 9-én hirtelen nyugdíjazták, sejthető okokból, 1966 júliusáig szerződéses munkaviszonyban, majd még egy évig óraadóként tanított. 72 éves koráig, fél évszázadon keresztül állott a katedrán.

Számba sem vehető azoknak a tanítványoknak a száma, akikkel Jónás Márton szerettette meg az egzakt természettudományokat, a logikus gondolkodást, és akik természettudományokon alapuló hivatást választottak. Szép számmal lettek matematika-fizika szakos tanárok is halasi és celldömölki tanítványai közül. Így pl. a már elhunyt Babay Béla, Bacsó Benő és a még mindig aktív Jerémiás Béla a halasi gimnáziumban folytatták Jónás Márton hivatását matematika-fizika szakos tanárként, Celldömölkön pedig néhány évig Horváth Jenő.

Több volt tanítványa tudományos minősítést is szerzett, matematikából Horváth Jenő (akadémiai doktor), Kósa András (kandidátus), Sebestyén Zoltán (akadémiai doktor) és Wiegandt Richárd (akadémiai doktor).

Sokáig megőrizte szellemi frissességét, sajátos humorát, fizikai erejét. Kora tavasztól késő őszig járt a tiltott bányatóra fürödni, és a vízen hanyatt fekve olvasta az újságot. Szerette és járta a természetet, ismerte a gombákat, kertészkedett, értett a gyümölcsfákhoz, szőlőműveléshez. 1972-ben aranydiplomát, 1983-ban gyémántoklevelet kapott. 1987. január 22-én hunyt el.

A nemzet napszámosa volt, nem is akármilyen napszámosa. Életével, munkásságával kiérdemelte, hogy az utókor hálával és tisztelettel őrizze emlékét.

Hálás köszönetet mondok Becker Gézáné Jónás Ágnesnek, Jónás Márton leányának mindazokért az értékes dokumentumokért, melyeket rendelkezésemre bocsátott és leveléért, melyben megható szeretettel emlékezett édesapjára.

Külön megköszönöm Wiegandt Richárdnak, a matematika tudomány doktorának, egykori Jónás tanítványnak őszinte, meghatározó segítségét.

VERSENYNAPTÁR

AZ 1994/95. TANÉVRE

A verseny neve	*Iskolai forduló*	*Megyei forduló*	*Döntő*	*Érdeklődni lehet*
Varga Tamás verseny (7-8. osztály)	**1994. okt. 31.** (14.00-16.00 óra)	**1995. jan. 19.** (14.00-16.00 óra)	**1995. ápr. 27.** (14.00-16.00 óra)	**Lajos Józsefné** 111-66-50 **André Lászlóné** 111-86-75
Kalmár László verseny (3-8. osztály)	**1995. március** első hete	**1995. ápr. 7.** (10.00-11.30 óra)	**1995. június** közepe	**Naményi Béla** 138-35-44 138-37-77/50
Zrínyi Ilona verseny (3-8. osztály)		**1995. márc. 3.**	**1995. ápr. 1-2-3.** Kecskemét	**Csordás Mihály** (76) 494-452 **Koleszár Edit** (76) 483-047
Törd a fejed! Magyar Rádió (1-8. osztály)	Minden **páros** héten csütörtökön **18.00-tól 18.30-ig** a Petőfi-adón az **„Észkerék"**-ben.			**Magyar Rádió Gordiusz-műhely** 138-74-94
Arany Dániel verseny (Kezdők: 8. osztály - I. középiskola)		**1995. febr. 2.**	**1995. ápr. 13.**	**Hámori Vera** 111-66-50 **André Lászlóné** 111-86-75
Arany Dániel verseny (Haladók: II. középiskola)	**1994. dec. 8.** (14.00-18.00 óra)	**1995. febr. 2.**	**1995. ápr. 13.**	**Hámori Vera** 111-66-50 **André Lászlóné** 111-86-75
OKTV-I., OKTV-II. (III-IV. középiskola)	**1994. okt. 31.** (14.00-18.00 óra)	**1995. jan. 5.** (14.00-19.00 óra)	**1995. márc. 9.** (10.00-15.00 óra)	**Lajos Józsefné** 111-66-50 **André Lászlóné** 111-86-75
OKTV-III. (III-IV. spec. tantervű középiskolai osztályok)	**1994. okt. 31.** (14.00-19.00 óra)		**1995. márc. 9.** (10.00-15.00 óra)	**Lajos Józsefné** 111-66-50 **André Lászlóné** 111-86-75

Matematika feladatmegoldó pontverseny

III. forduló

Kitűzött feladatok 11-12 éveseknek (5-6. osztály)

95.1. Adott két szám. Mindkettőből elvesszük a kisebbik szám harmadát. Ekkor a kapott nagyobbik különbség 4-szerese a kisebbiknek. Hányszor akkora a nagyobb szám, mint a kisebb?

95.2. Számítsuk ki a háromjegyű páratlan számok összegét! Mennyi a tízjegyű páratlan számok összege és miért?

95.3. Helyezzünk el a síkon 12 pontot 6 egyenesen úgy, hogy mindegyik egyenesen 4 pont legyen! Keressünk több megoldást!

95.4. Induljunk ki egy kétjegyű számból, legyen ez például 28! Adjuk hozzá a számjegyei megfordításával kapott kétjegyű számot: $28 + 82 = 110$. Ezután a kapott összegre ismételjük meg ugyanezt: $110 + 011 = 121$. A most kapott szám ún. palindrom szám, a számjegyeit megfordított sorrendben írva ugyanazt a számot kapjuk.
Igaz-e, hogy bármelyik *kétjegyű* számból indulunk is ki, előbb-utóbb palindrom számhoz jutunk? Írd le, mit tapasztaltál! Melyik kétjegyű szám esetén tartott legtovább az eljárás?

Kitűzött feladatok 13-14 éveseknek (7-8. osztály)

95.5. Figyeljük meg a szabályszerűséget a következő négyzetre emelésekben:

$34^2 = 1156$,
$334^2 = 111556$,
$3334^2 = 11115556$.

Fogalmazzuk meg és bizonyítsuk is be az általános törvényszerűséget!

95.6. Adott egy téglalap, és egyik oldalán egy csúcstól különböző P pont. Határozzuk meg azt a téglalap belsejében haladó legrövidebb utat, amely P-ből indul, érinti a téglalap többi három oldalát is, és P-be tér vissza!

95.7. A pozitív egész számok egy része szerepel a következő táblázatban:

4,	7,	10,	13,	16,	19,	22,...
7,	12,	17,	22,	27,	32,	37,...
10,	17,	24,	31,	38,	45,	52,...
13,	22,	31,	40,	49,	58,	67,...
16,	27,	38,	49,	60,	71,	82,...
19,	32,	45,	58,	71,	84,	97,...
22,	37,	52,	67,	82,	97,	112,...
.....						

Az első sorba 4-gyel kezdve írtuk a számokat úgy, hogy minden következő 3-mal nagyobb az előzőnél. Ezután az első sort írtuk az első oszlopba is. A második sorban 5-tel nőnek a számok, a harmadikban 7-tel, a negyedikben 9-cel és így tovább. Minden következőben a következő páratlan számmal növekednek a számok.

a) Bizonyítsuk be, hogy ha egy a szám szerepel a táblázatban, akkor $2a + 1$ összetett szám!

*b)** Mutassuk meg, hogy ha a nem szerepel a táblázatban, akkor $2a + 1$ prímszám!

95.8. Egy téglalap alakú lemez oldalai 10 és 20 egység. Véletlenszerűen „rádobálunk" 16 darab egység oldalú négyzetet a lemezre. Mutassuk meg, hogy bárhogyan is helyezkednek el a lemezen a négyzetek, még mindig rá lehet tenni a lemezre egy egységsugarú körlemezt úgy, hogy sehol sem lóg ki a lemezről és egyik egységnégyzetbe sem „lóg bele"!

* * *

A versenyfelhívás A matematika tanítása 1994. évi 4. számában olvasható.

A megoldásokat a következő címre kérjük küldeni:

Mozaik Oktatási Stúdió
6701 Szeged Pf. 301.

A borítékra kérjük írják rá: *Matematika feladatmegoldó pontverseny*. A beküldési határidő: *1995. február 28.*

Az 1994/95. tanévi matematika feladatmegoldó pontverseny I. fordulójában kitűzött feladatok megoldása

A feladatok szövege az 1994/4. szám 24. oldalán olvasható.

94.17. Felsoroljuk azokat a számnégyeseket, amelyeknek összege szintén a bűvös négyzet állandója, 34:

$$\begin{matrix}13 & 3\\ 8 & 10\end{matrix};\quad \begin{matrix}13 & 3\\ 12 & 6\end{matrix};\quad \begin{matrix}13 & 3\\ 14 & 4\end{matrix};$$

$$\begin{matrix}13 & 2\\ 8 & 11\end{matrix};\quad \begin{matrix}13 & 2\\ 12 & 7\end{matrix};\quad \begin{matrix}13 & 2\\ 15 & 4\end{matrix};$$

$$\begin{matrix}13 & 16\\ 1 & 4\end{matrix};\quad \begin{matrix}3 & 2\\ 15 & 14\end{matrix};\quad \begin{matrix}3 & 16\\ 10 & 5\end{matrix};$$

$$\begin{matrix}3 & 16\\ 6 & 9\end{matrix};\quad \begin{matrix}3 & 16\\ 1 & 14\end{matrix};\quad \begin{matrix}2 & 16\\ 11 & 15\end{matrix};$$

$$\begin{matrix}2 & 16\\ 7 & 9\end{matrix};\quad \begin{matrix}2 & 16\\ 1 & 15\end{matrix};\quad \begin{matrix}8 & 10\\ 1 & 15\end{matrix};$$

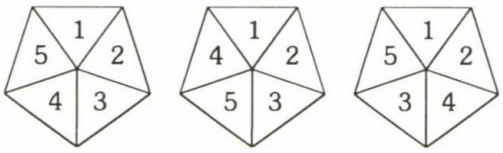
$$\begin{matrix}8 & 11\\ 1 & 14\end{matrix};\quad \begin{matrix}8 & 5\\ 12 & 9\end{matrix};\quad \begin{matrix}10 & 11\\ 6 & 7\end{matrix};$$

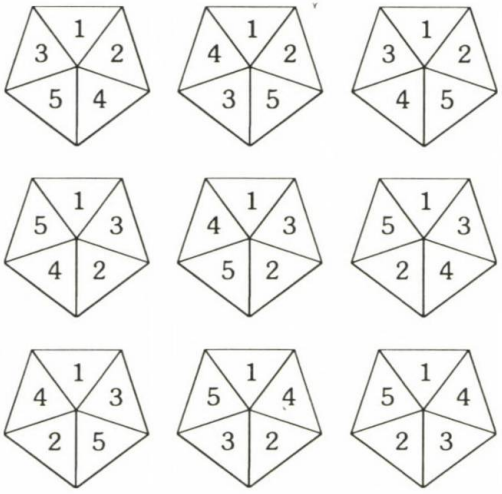
$$\begin{matrix}10 & 5\\ 15 & 4\end{matrix};\quad \begin{matrix}11 & 5\\ 14 & 4\end{matrix};\quad \begin{matrix}12 & 6\\ 1 & 15\end{matrix};$$

$$\begin{matrix}12 & 7\\ 1 & 14\end{matrix};\quad \begin{matrix}6 & 9\\ 15 & 4\end{matrix};\quad \begin{matrix}7 & 9\\ 14 & 4\end{matrix}.$$

A felsorolt 24 számnégyesből a többség egy-egy téglalap négy csúcsában helyezkedik el, néhány négyes pedig egy-egy paralelogramma négy csúcsában áll. Még további, kevésbé szabályosan elhelyezkedő számnégyeseket is találhat az olvasó.

94.18. A szabályos ötszög lehetséges színezéseit a következő ábrák mutatják, az egyes színeket számokkal jelöltük:





A felsorolt 12 szinezésből újabb 12-t kapunk, ha az ötszögeket az 1 színű háromszög (egyben az ötszög) szimmetriatengelyére tükrözzük. Így összesen 24 különböző, forgatással egymásba át nem vihető szinezést kapunk.

94.19. Jelöljük a keresett számokat így: a, b, c, d. Feltételezhetjük, hogy $1 \le a \le b \le c \le d$. Tudjuk, hogy $a+b+c+d = abcd$. Másrészt $d < a+b+c+d \le 4d$, tehát

$$d < abcd \le 4d.$$

Így tehát

$$1 < abc \le 4.$$

Az abc szorzat értéke tehát 2, 3 vagy 4 lehet. Vegyük sorra az egyes eseteket.

Ha $abc = 2$, akkor $a = b = 1$ és $c = 2$ lehet csak, így $a+b+c+d = 4+d$, $abcd = 2d$, tehát $4+d = 2d$, $d = 4$.

A talált megoldás valóban jó: $1+1+2+4 = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 4 = 8$.

Ha $abc = 3$, akkor $a = b = 1$ és $c = 3$, tehát $a+b+c+d = 5+d$, $abcd = 3d$, ebből $5+d = 3d$, $5 = 2d$, d nem egész szám.

Végül ha $abc = 4$, akkor vagy $a = 1$, $b = c = 2$, vagy $a = b = 1$ és $c = 4$.

Az első esetben $a+b+c+d = 5+d$, $abcd = 4d$, tehát $5+d = 4d$, $5 = 3d$, d nem egész.

A második esetben $a+b+c+d = 6+d$, $abcd = 4d$, tehát $6+d = 4d$, $6 = 3d$, $d = 2$, ami nem lehet, mert $d \geq 4$.

A feladat egyetlen megoldása tehát az $a = b = 1$, $c = 2$ és $d = 4$.

94.20. Figyeljük meg 9 pozitív egész kitevőjű hatványainak utolsó két számjegyét:

kitevő	a hatvány két utolsó számjegye
1	09
2	81
3	29
4	61
5	49
6	41
7	69
8	21
9	89
10	01
11	09
...	...

Az utolsó két számjegy periódikusan ismétlődik és a periodus hossza 10. A 9^{99} utolsó két jegye tehát zonos 9^9 utolsó két jegyével, tehát 89. Így $9^{99}+1$ utolsó két jegye 90, tehát egy 0-ra végződik.

94.21. A 6×6-os sakktáblán 36 mező van, erre megpróbálhatunk elhelyezni 9 darab 1×4-es téglalapot. A próbálkozások nem vezetnek sikerre, így azt kell igazolni, hogy a lefedés nem lehetséges.

„Színezzük" be a sakktábla mezőit 4 színnel úgy, hogy bárhova is teszünk rá egy 1×4-es téglalapot, az mindig 4 különböző színű mezőt fedjen!

2	3	4	1	2	3
1	2	3	4	1	2
4	1	2	3	4	1
3	4	1	2	3	4
2	3	4	1	2	3
1	2	3	4	1	2

Az egyes színeket az ábrán számok jelölik. Mivel a szinezést úgy készítettük, hogy bármely (természetesen négy teljes mezőt fedő) 1×4-es téglalap 4 különböző színű mezőt fed. Ha tehát a sakktábla lefedhető lenne 9 darab 1×4-es téglalappal, akkor minden színű mezőből 9 lenne a sakktáblán. Számoljuk össze, valójában hány mező van az egyes színekből: 9 darab 1 színű, 10 darab 2-es színű, 9 darab 3-as színű és 8 darab 4-es színű. Ez ellentmond feltevésünknek, tehát a szóban forgó lefedés nem lehetséges.

94.22. Némi töprengés, számolgatás után arra az eredményre jutunk, hogy 4 olyan számot meg tudunk adni, amelyek közül bármely kettőnek az összege osztható 26-tal: 13, 39, 65, 91, de 5-öt vagy többet már nem sikerül. Az utóbbi sejtést fogjuk bizonyítani.

Tegyük fel, hogy a, b, c, d, e öt különböző 1 és 100 közötti pozitív egész szám és bármely két szám összege osztható 26-tal. Meg fogjuk mutatni, hogy 26-tal osztva mind az öt azonos maradékot ad.

A feltételből tudjuk, hogy $a+b$, $a+c$, $a+d$, $a+e$ osztható 26-tal, de akkor ezek különbsége is osztható 26-tal, tehát $b-c$, $b-d$, $b-e$ osztható 26-tal, azaz b, c, d, e azonos maradékot adnak 26-tal osztva. De $a+b$, $c+b$ is osztható 26-tal, tehát $a-c$ is, azaz a és c is azonos maradékot adnak 26-tal osztva.

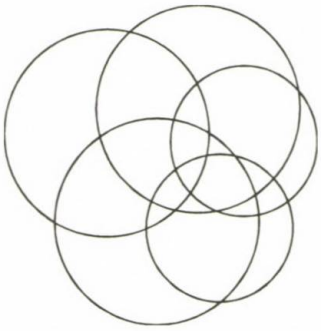
Azt kaptuk tehát, hogy a, b, c, d, e mind azonos maradékot adnak 26-tal osztva.

Ha most a számokat 1-től 100-ig osztályozzuk, a szerint, hogy mennyi maradékot

adnak 26-tal osztva, akkor – mivel a szóba jöhető maradékok 0, 1, 2, ..., 24, 25 – összesen 26 csoportot kapunk. Ezek közül 22 csoport 4 számot tartalmaz, a többi 4 (ezek a 0, 23, 24, 25 maradékot adó számok) csoport pedig 3 számból áll.

Így tehát azt kaptuk, hogy 5 vagy még több szám nem rendelkezhet a megadott tulajdonsággal.

94.23. Érdemes lépésről lépésre haladni és fokozatosan növelni a körök számát, majd összeszámolni a keletkezett síkrészeket.

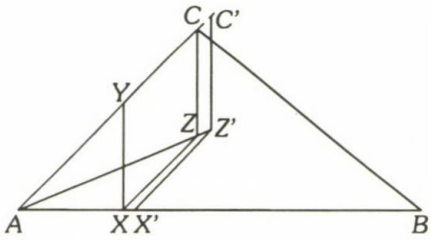


A körök száma n	A síkrészek száma $r(n)$
1	2
2	4
3	8
4	14
5	22
⋮	⋮
10	92
⋮	⋮
n	$r(n-1)+2(n-1)$

Az ábrán 5 kört rajzoltunk meg.

Öt körig akár közvetlen számolással is adódnak a táblázatban olvasható eredmények. Ugyanakkor megfigyelhetjük a következő általános törvényszerűséget: akkor kapjuk a legtöbb síkrészt, ha az újabb kör az össze eddigit metszi. Tehát az n-edik kör az előző $n-1$ kör mindegyikét 2 pontban metszi. Az így kapott $2n-2$ pont az n-edik kör kerületét $2n-2$ ívdarabra bontja. Mindegyik ívdarab egy előző síkrészt vág ketté, tehát a síkrészek száma $2n-2=2(n-1)$-gyel nő.

Könnyű ellenőrízni, hogy így $r(n)=n^2-n+2$.



94.24. A szerkesztés menete például a következő lehet. A keresett $AXYC$ „út" helyett először egy olyan $AXZC$ „utat" szerkesztünk, amelyre $AX=XZ=ZC$ és X az AB oldalon van, XZ pedig párhuzamos AC-vel. Ezt például úgy tudjuk megszerkeszteni, hogy először egy „hasonló utat" építünk, amely az AC oldalegyenes egy C' pontjában végződik. AB-n felveszünk egy X' pontot, az $X'Z'$ egyenes legyen párhuzamos AC-vel és $X'Z'=AX'$, végül Z'-ből az AX' távolsággal elmetszük AC-t, így kapjuk a C'-t. Ügyelünk arra, hogy az $AC'Z'$ szög egyenlő legyen a CAB szöggel. Így $AX'Z'C'$ egy olyan trapéz, amelynek két szára és egyik alapja egyenlő hosszú. Ezt az A csúcsból kinagyítjuk vagy lekicsinyítjük úgy, hogy C' a C-vel essen egybe. Így megkaptuk a kívánt $AXZC$ utat, ha most XY párhuzamos ZC-vel, akkor egyenlő is vele, de $XY=YC$ $(=AX)$ is igaz lesz, mert $XZCY$ rombusz.

A szerkeszthetőség feltétele: α hegyesszög legyen és igazolható, hogy ha $\frac{\alpha}{2}\leq\gamma$, akkor az AB oldalon mindig van ilyen pont.

Az 1993/94. tanévi feladatmegoldóverseny szegedi döntőjén kitűzött feladatok megoldása

(A feladatok szövege A matematika tanítása 1994. évi 4. számának 30. oldalán olvasható)

5-6. osztályosok feladatai

1. Az ábra szerint a téglalapok oldalait jelölje x, y, u és v!

	x	y
u	A 18 cm²	B 27 cm²
v	D ?	C 6 cm²

Mivel

$$x \cdot v = \frac{x \cdot v \cdot u \cdot y}{u \cdot y} = \frac{(x \cdot u) \cdot (y \cdot v)}{u \cdot y} = \frac{18 \cdot 6}{27};$$

a keresett terület 4 cm².

2. A feladatból következik, hogy $1 \times 1 \times 1$ és $2 \times 2 \times 2$ kockák is keletkezni fognak. De ha a 27 cm³ térfogatú eredeti kockából egy darab 8 cm³ térfogatú $2 \times 2 \times 2$-es kockát kivágtunk, akkor már csak $1 \times 1 \times 1$-es kockák jönnek létre – összesen 19 darab. Tehát a darabolás során összesen 20 kockát kaptunk.

3. Az elérhető maximális pontszám 15 – három győzelemmel. Két első és egy második helyezéssel 13 pont szerezhető. Másképpen ez a pontszám nem jön létre. Viszont 11 pont kétféleképpen is elérhető: két második és egy első; illetve két első és egy harmadik hellyel. Tehát a „biztos" győzelemhez legalább 13 pontot kell szerezni.

4. 32 perc „gyors" felvétel a szalag $\frac{32}{120}$ részét, a 44 perc „normál" felvétel a szalag $\frac{44}{240}$ részét, az x perc „extra hosszú" felvétel pedig az $\frac{x}{360}$ részét foglalja el. Ezért

$$\frac{32}{120} + \frac{44}{240} + \frac{x}{360} = 1;$$

ahonnan $x = 198$. Tehát 198 perc „extra hosszú" felvétel fér a szalagra.

5. Az 1-től 50-ig terjedő számokat aszerint osztjuk hét csoportba, hogy 7-tel osztva mennyi lesz a maradék.

	osztási maradék	darab
1. sor: 1, 8, ..., 50	1	8
2. sor: 2, 9, ..., 44	2	7
3. sor: 3, 10, ..., 45	3	7
4. sor: 4, 11, ..., 46	4	7
5. sor: 5, 12, ..., 47	5	7
6. sor: 6, 13, ..., 48	6	7
7. sor:7, 14, ..., 49	0	7

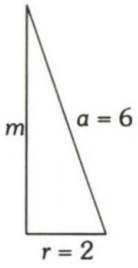
Az nyilvánvaló, hogy a 7. sorból legfeljebb egy számot választhatunk, mert bármely kettő összege osztható lesz 7-tel. Hasonló okból egyszerre nem választhatunk számokat az első és a hatodik sorból illetve a második és az ötödik sorból, továbbá a harmadik és a negyedik sorból. Tehát az első, második/ötödik és a harmadik/negyedik sorbeli számokhoz a hetedik sorból egyetlen számot választva összesen 23 „megfelelő" számot kapunk. (Az első sorban nyolc és a hatodik sorban pedig csak hét szám van, ezért választunk az első sorból számokat.)
Figyelem: nem a „jó" számokat kellett felsorolni; hanem csak ezeknek a számát kellett megadni. (Láttuk: a kiválasztás nem egyértelmű.)

7-8. osztály feladatai

1. A keletkező kúpok alapkörének kerülete a 6 cm sugarú kör kerületének harmada, vagyis 4π, így az alapkör sugara 2 cm. Ennek a kúpnak az alkotója az eredeti kúp 6 cm-es sugara, így az ábra szerint

$$m^2 + 2^2 = 6^2,$$

vagyis $m = 4 \cdot \sqrt{2}$.



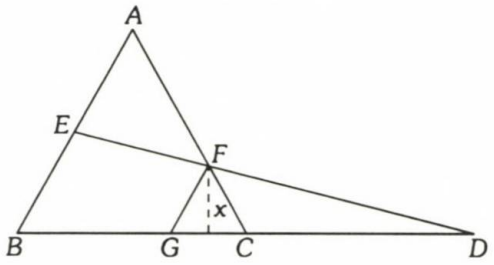
2. Legyen az AC oldal és az ED egyenes metszéspontja F! Az F ponton át párhuzamost húzunk az AB oldallal, amely a BD egyenest a G pontban metszi. A hasonlóság miatt

$$\frac{1}{\overline{GF}} = \frac{4}{2+\overline{GF}},$$

amelyből

$$\overline{GF} = \overline{GC} = \frac{2}{3}.$$

Ez azt jelenti, hogy a GCF és az ABC háromszögek hasonlók és a hasonlóság aránya $1 : 3$, tehát $x = \frac{m}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Mivel $T_{BEFC} = T_{BED} - T_{CFD}$, továbbá $T_{BED} = \frac{T_{ABD}}{2} = \sqrt{3}$ és $T_{CFD} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot 3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, ezért $T_{BEFC} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3}$, vagyis az eredeti háromszög területének $\frac{2}{3}$-a.



3. Foglaljuk az adatokat táblázatba!

	Lányok	Fiúk
Csak énekkar	100 – 80 = 20	100 – (80 – x)
Csak zenekar	100 – 60 = 40	x
Mindkettőben	60	80 – x
Összesen:	120	230 – 120 = 110

Nyilván

$$\{100 - (80 - x)\} + x + (80 - x) = 110,$$

ahonnan $x = 10$.
Tehát 10 olyan fiú van, aki csak a zenekarban játszik.

4. Egy $\overline{xy} = 10x + y$ számhoz a $11x + 2y$ számot rendeljük hozzá. Ha az eredeti szám egyjegyű ($x = 0$ és $0 \le y \le 9$), akkor az y számhoz a $2y$ mennyiséget rendeljük, így 10-nél kisebb páratlan számok nem keletkeznek. (A 10-nél nagyobb, de 20-nál kisebb páratlan számok létrejöhetnek pl.: 13 a 11-hez van rendelve.) Nyilvánvaló, hogy a $11x + 9$ alakú számok semelyik számhoz sem lettek hozzárendelve. (Például $11x + 5$ őse: $11 \cdot (x - 1) + 2 \cdot 8 = \overline{(x-1)8}$.)
Tehát a következő számok nem jönnek létre: 1; 3; 5; 7; 9; 20; 31; 42; 53; 64; 75; 86; ... A tizedik „kimaradó" szám a 64.

5. Legyen a 7 egymás utáni szám: $n - 3$; $n - 2$; $n - 1$; n; $n + 1$; $n + 2$; $n + 3$. Ezek összege $7n$. Ez akkor négyzetszám, ha $n = 7^{2k+1} \cdot p^2$ ($k = 0, 1, ...$) és akkor köbszám, ha $n = 7^{3l+2} \cdot q^3$ ($l = 0, 1, ...$). A legkisebb $3l + 2$ alakú páratlan szám az 5, így $n = 7^5 = 16807$. A keresett számok 16804, 16805, 16806, 16807, 16808, 16809 és 16810.

Feladatrovat tanároknak

Rovatvezető: **Pogáts Ferenc**

A megoldásokat kérjük a rovatvezető címére küldeni: **1052 Budapest, Petőfi Sándor u. 10. II. 10**. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljék. Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak a megoldásait is) külön lapra írják tollal vagy írógéppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsák össze, és külső felére írják rá a feladat számát és a megoldó nevét! Csatoljanak a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat a kitűzést követő negyedik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük. **Beküldési határidő:** *1995. február 28.*

31. Ketten felváltva helyeznek el a sakktáblán egyforma sakkfigurákat, a játékot kezdő Viktor világosakat, a másodhúzó Orbán sötéteket (az egyforma bábukból kellően sok áll rendelkezésükre). A játékot elveszíti az, aki már nem tud úgy saját színű figurát lerakni, hogy a másik által korábban letett figura ne ütné.

Viktor vagy Orbán nyer, ha a bábuk

a) bástyák,
b) futók,
c) huszárok?

(Blázsik Zoltán, Szeged)

32. A háromszög súlypontján áthaladó egyenes a háromszöget két részre vágja. Mely egyenesekre lesz e két rész területének a különbsége

a) minimális,
b) maximális?

Mekkora ez a minimum illetve maximum, ha a háromszög területe t?

(Jakucs Erika, Budapest)

33. Egyenlő szárú-e az a háromszög, amelynek két szögére az

$$1-2\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{y}{2}}=\operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{y}{2}.$$

(Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely)

34. Mely pozitív egész n értékekre lesz a

$$p_n=2^{f_n}+1$$

prímszám, ha f_n az n-edik *Fibonacci*-szám?

(Ambrus Gabriella, Budapest)

35. Az egysejtű időegységenként meghal, vagy kétfelé osztódik. Ha az n-edik időegység eltelte után él utódja, akkor ez az n-edik generáció tagja. Mutassuk meg, ha az ősanya egysejtűtől számított n-edik generációban van élet, minden n-re, akkor e nemzetségnek nem szakad magja!

(Pósa Lajos, Budapest)

36. Határozza meg azt az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvényt, amelyre

$$f(x+y+z)=\max(f(x+y),z)+\min(x,f(y+z))$$

minden $x, y, z\in\mathbb{R}$-re!

(Bencze Mihály, Brassó)

Feladatmegoldások (13-18. feladatok)

13. Egy 2 egység oldalú négyzet tartalmaz hét, 1 egység területű négyszöget. Bizonyítsuk be, hogy van két négyszög, amelyek közös részének a területe legalább $\frac{1}{7}$ egységnyi!

(Bundeswettbewerb, 1973/74)

1. megoldás: Az állítással ellentétben tegyük fel, hogy bármely két egységterületű négyszög közös részének a területe kisebb $\frac{1}{7}$-nél! A hét négyszög $\binom{7}{2}=21$-féleképpen választható ki kettő. Feltevésünk miatt a közös részek összterülete a $21\cdot\frac{1}{7}=3$-nál kisebb, így a hét egységnégyszög összterületéből a közös részek összterületét levonva 4-nél több, vagyis az eredeti négyzet területénél nagyobb lesz a maradék.

Ez az ellentmondás biztosít afelől, hogy feltevésünk ellenkezője igaz.

(Ambrus Gabriella, Budapest)

2. megoldás: Az állításnál többet igazolunk. Legyen $n\geq 2$ egész! Egy $\frac{n+1}{2}$ területű sokszög tartalmaz n darab egységterületű sokszöget. *Bebizonyítjuk:* van két olyan sokszög a tartalmazottak között, amelyek közös részének a területe legalább $\frac{1}{n}$ egység.

Indirekt úton igazoljuk az állítást. Legyen a tartalmazott n darab egységnyi területű sokszög bármely kettejének közös része az $\frac{1}{n}$-nél kisebb területű. A sokszögeket távolítsuk el egyenként addig, amíg közös belső pont nélküli sokszögek maradnak az eredeti sokszögben! Ezek száma legalább egy. Ezután az eltávolított sokszögeket helyezzük vissza, egyenként! Jelölje t_i az i darab sokszög által lefedett területet, így feltételeink szerint

$$t_1=1,\ t_2>t_1+\left(1-\frac{1}{n}\right)=1+\frac{n-1}{n},$$

$$t_3>t_2+\left(1-\frac{2}{n}\right)=1+\frac{n-1}{n}+\frac{n-2}{n},\ldots$$

$$t_n>1+\frac{n-1}{n}+\frac{n-2}{n}+\ldots+\frac{2}{n}+\frac{1}{n}=$$

$$=1+\frac{1}{n}(n-1)\frac{n}{2}=\frac{n+1}{2}.$$

Így $t_n>\frac{n+1}{2}$, ami lehetetlen, tehát eredeti állításunk igaz.

(Tóth Sándor, Sárospatak)

A megoldók száma: 10.

14. Az (x_n) számsorozatot definiáljuk az alábbiak szerint:

$$x_0=\frac{a}{c},\ x_n=\frac{a\cdot 10^n+b\frac{10^n-1}{9}}{b\cdot 10^n+c\frac{10^n-1}{9}}\quad n\in\mathbb{N},$$

ahol a, b, c nullától különböző egyjegyű egészek.

Igazoljuk: ha $x_0=x_1$, akkor a sorozat minden tagja az x_0-lal egyenlő!

(Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely)

Megoldás: Az x_0 hibásan definiált, helyesen $x_0=\frac{a}{b}$!

Ezzel

$$x_0=\frac{a}{b},\ x_1=\frac{\overline{ab}}{\overline{bc}},\ x_2=\frac{\overline{abb}}{\overline{bcc}},\ldots,$$

$$x_n=\frac{\overline{ab\ldots b}}{\overline{bc\ldots c}}\quad (n \text{ darab } b, c \text{ jegy}).$$

Ha $x_0=x_1$, úgy

$$\frac{a}{b}=\frac{10a+b}{b+10c},$$

vagyis

$$ac=b^2.$$

Az $x_n=x_0$ pontosan akkor áll, ha

$$b(a10^n+\overline{11\ldots 1}b)=a(b10^n+\overline{11\ldots 1}c),$$

ha tehát

$$b^2 = ac.$$

Ezzel igazoltuk a helyesbített feladatot.

(Simon József, Csíkszereda)

Megjegyzés: A rovatvezető szíves elnézését kéri olvasóinak, feladatmegoldóinak a jórészt neki felróható, elszaporodott sajtóhibákért! Ezek megszüntetésére igyekszik megoldást találni.

A megoldók száma: 10.

15. Mutassuk meg, hogy ha a és k pozitív egészek, akkor $a < 10^3$-re nincs az

$$5^k - 1 = a^2$$

egyenletnek megoldása!

(Ambrus Gabriella, Budapest)

Megoldás: A feladat állítása hamis, hiszen $5^1 - 1 = 2^2$. Azt igazoljuk, hogy ha a és k nem kisebb 2-nél, úgy igaz az állítás.

Ha $k = 2n$, úgy $5^{2n} - 1 = a^2$-ből

$$(5^n)^2 - a^2 = 1,$$

aminek $n \geq 1$-re nincs megoldása, lévén a bal oldal szomszédos két négyzetszám különbsége.

Ha a k páratlan, úgy $5^9 > 10^6$ miatt a $k \in \{3, 5, 7\}$, de

$$5^3 - 1 = 124, \quad 5^5 - 1 = 3124 \text{ és}$$
$$5^7 - 1 = 78124$$

egyike sem négyzetszám.

(András Szilárd Károly, Csíkszereda)

Megjegyzés: Bebizonyítható az is, hogy a fenti egyenletnek nincs a $k = 1$, $a = 2$-től különböző megoldása.

A megoldók száma: 11.

16. Az O középpontú körvonal B, A, C pontjai egy $BAC\sphericalangle = \alpha < 90°$ szöget határoznak meg. Mekkora ez az α, ha a BO egyenes az AC-t E-ben, a CO egyenes az AB-t D-ben metszve az $ADE\sphericalangle = EDC\sphericalangle = \alpha$ is teljesül?

(The Math. Gazette)

1. megoldás: Az 1. ábra jelöléseivel (GM a BC húr felezőmerőlegese)

$$OED_\Delta \cong DGO_\Delta,$$

hiszen OD oldaluk közös, és az ezen nyugvó szögeik egyenlők, továbbá az OBD_Δ egyenlő szárú, azaz $OB = BD$, mivel az OD oldalán levő szögei 2α-val egyenlők.

Ezek szerint

$$CG = GB = BE. \tag{1}$$

A $BGM\sphericalangle = \pi - 3\alpha$ miatt

$$BGC\sphericalangle = 2\pi - 6\alpha,$$

tehát (1) miatt

$$BCG\sphericalangle = 3\alpha - \frac{\pi}{2}.$$

Ha most $BG < BC$, úgy a BCG_Δ-ben

$$3\alpha - \frac{\pi}{2} < 2\pi - 6\alpha,$$

amiből

$$\alpha < \frac{5\pi}{18}, \tag{2}$$

másrészt a BCE_Δ-ben $BE < BC$ miatt $BCE\sphericalangle < BEC\sphericalangle$.

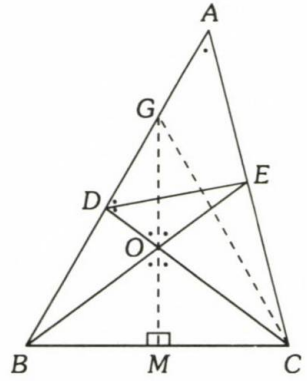
Mivel $BCE\sphericalangle = MCO\sphericalangle + OCE\sphericalangle = \frac{\pi}{2} - \alpha + \pi - 3\alpha = \frac{3\pi}{2} - 4\alpha$ és a $BEC\sphericalangle$ az $AEOD$ négyszög E csúcsánál levő szög mellékszöge, tehát $BEC\sphericalangle = \pi - (2\pi - 5\alpha) = 5\alpha - \pi$, ezért

$$\frac{3\pi}{2} - 4\alpha < 5\alpha - \pi,$$

azaz

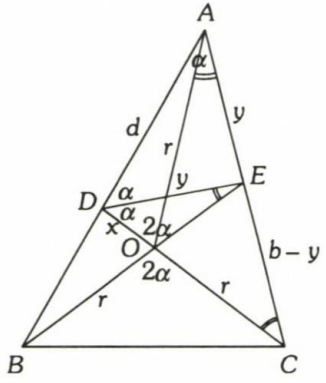
$$\alpha > \frac{5\pi}{18}, \tag{3}$$

ami ellentmond a (2)-nek. Ugyanígy jutunk ellentmondásra a $BG > BC$ feltétellel is, tehát $BG = BC$ és $\alpha = 50°$.



1. ábra

2. megoldás: A 2. ábrán az egyformán jelzett szögek egyenlők, hiszen az ACD_Δ-ben $ACD\sphericalangle = \pi - 3\alpha$ és az ODE_Δ-ben $OED\sphericalangle = \pi - 3\alpha$, továbbá $OA = OC = r$.



2. ábra

Ennélfogva az ACD, a DEO és a CDE háromszögek hasonlók, tehát megfelelő oldalaik aránya egyenlő:

$\frac{b}{y} = \frac{d}{x}$, az $ACD_\Delta \sim DEO_\Delta$ miatt és

$\frac{b-y}{y} = \frac{r+x}{d}$, az $ACD_\Delta \sim DEO_\Delta$ miatt.

Ezekből

(1) $\frac{d}{x} - 1 = \frac{r+x}{d}$.

Az ADC_Δ-ben a szinusztétel miatt $\frac{r+x}{d} = \frac{\sin\alpha}{\sin 3\alpha}$, az ADO_Δ-ben ugyanezért $\frac{d}{x} = \frac{\sin 6\alpha}{\sin 4\alpha}$, mert $DAO\sphericalangle = \alpha - OAC\sphericalangle = \alpha - ACD\sphericalangle = \alpha - (\pi - 3\alpha) = 4\alpha = \pi$ és $AOD\sphericalangle = 2ACD\sphericalangle = 2(\pi - 3\alpha) = 2\pi - 6\alpha$.

Így a (4) miatt

$$\frac{\sin 6\alpha - \sin 4\alpha}{\sin 4\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\sin 3\alpha}.$$

A bal oldal számlálóját a $2\sin\alpha\cos 5\alpha$ szorzattá bontva, $\sin\alpha$-val egyszerűsítve, rendezés után a

$$2\sin 3\alpha\cos 5\alpha = \sin 4\alpha,$$

ebből a bal oldal $\sin 8\alpha - \sin 2\alpha$ lévén, a

$\sin 2\alpha = \sin 8\alpha - \sin 4\alpha = 2\sin 2\alpha\cos 6\alpha$,

vagyis $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ miatt

$$\cos 6\alpha = \frac{1}{2}$$

adódik. A fentiek szerint $4\alpha - \pi > 0$ és $2\pi - 6\alpha > 0$, vagyis $\frac{3\pi}{2} < 6\alpha < 2\pi$, tehát $\alpha = \frac{5\pi}{18} = 50°$.

(Blázsik Zoltán, Szeged)

17. Egy tetraéder valamennyi lapszöge egyenlő. Szabályos-e? Ha a tetraéder öt lapszöge egyenlő, szabályos kell-e legyen a tetraéder?

(Am. Math. Monthly)

Megoldás: Lásd a A matematika tanítása '94/5. számában a feladatmegoldások 11. feladatát!

A megoldók száma: 6.

18. Egy tulipánkertész kertjének minden ágyásában tulipánokat nevel. A kert bármely két különböző színű tulipánjának pontosan egy ágyást ad. Bármely ágyáshoz pontosan egy olyan ágyás van, amelyben nincs amazzal egyező színű tulipán. Mutassuk meg, hogy

(i) bármely ágyásba legalább kétféle színű tulipánt ültetett;
(ii) a kertben legalább négy különféle színű tulipán van és
(iii) legalább hat ágyás;
(iv) nincs olyan ágyás, amelyben három különféle színű virág lenne!

Megoldás: Három szabályunk van:

(1) minden ágyásban van virág;
(2) bármely két szín pontosan egy ágyásban van;
(3) ha A ágyás, úgy van olyan B ágyás, amelyben egyetlen szín sem az A ágyásból való.

(i) Tegyük fel, hogy az A ágyásban egyetlen szín van, a piros. A (3) miatt van oly B ágyás, amelyben piros egy szál sem. Az (1) miatt B-ben van más szín, legyen ez a fehér. A (2) miatt van oly C ágyás, amely „kétszínű", piros és fehér; C mind az A-tól mind a B-től különbözik. Ugyancsak a (3) miatt van oly D ágyás, amelyben sem piros, sem fehér színt nem találunk. Mivel B és D különbözők, és egyikükben sincs A-beli piros, ezért a (3)-mal ellentmondásba kerültünk.

(ii) Az (i) miatt valamely A ágyásban van legalább két szín, piros és fehér. A (3) miatt van oly B ágyás, amely se nem piros, se nem fehér, de (i) miatt legalább „kétszínű", zöld és kék.

(iii) Az (ii) nyomán van már két ágyásunk, legalább kettő meg kettő, azaz négy színnel. A (2) miatt van további négy A-tól, B-től és egymástól is különböző, C, D, E és F ágyásunk.

(iv) Tegyük fel, hogy az A ágyásban m-féle szín van! A (3) miatt van B ágyás, amelyben csupa A-tól elütő szín van, legyen ezek száma n. Megszámoljuk, hogy hány ágyás van.

A (2) és a (3) szabályokból következik, hogy az A és a B ágyásoktól különböző bármely ágyásban pontosan egy szín az A-ból és egy a B-ből való, tehát $mn + 2$ az ágyások száma.

Tegyük fel, hogy a piros szín az A-ból való! Az előbbiek szerint ez a szín $n + 1$ ágyásban látható.

Legyen C az A és B ágyásoktól különböző és r színű!

A (3) miatt van oly D ágyás, amelyben minden szín különbözik a C-beli r szín bármelyikétől.

A D ágyásban van szín az A-ból, s mint előbb láttuk ez a szín $n + 1$ ágyásban fordul elő. Ám fentebbi okoskodásunk szerint, ha D az A és C a B szerepét kapja, úgy D-beli szín $r + 1$ ágyásban található, vagyis $r = n$. Ugyanígy nyerjük, hogy bármely A-tól különböző ágyásban n szín van, ennélfogva most C és D szerepelvén B és A helyett, $n^2 + 2$ ágyást számlálunk.

Az $n^2 + 2 = mn + 2$-ből $m = n$, vagyis minden ágyás n-színű.

Az $n^2 + 2$ ágyás mindegyikében n szín van és minden szín $n + 1$ ágyásban virít, ezért az $\frac{n(n^2+2)}{n+1}$ egész.

Mivel $(n; n + 1) = 1$ és $n^2 + 2 = (n + 1)^2 - 2(n + 1) + 3$, ezért $n + 1 \mid n^2 + 2$ pontosan akkor, ha $n + 1 \mid 3$, azaz ha $n = 2$.

A megoldók névsora: Ambrus Gabriella, Budapest (13-15.); András Szilárd Károly, Csíkszereda (13-18.); Barta László, Szécsény (13-15., 17., 18.); Blázsik Zoltán, Szeged (13-18.); Csete Lajos, Markotabödöge (14., 15.); Csorba Ferenc, Győr (13-15.); Kocsis Orsolya, Szolnok (13-15., 18.); Nyírő László, Mezőkövesd (13., 15., 18.); Simon József, Csíkszereda (13-18.); Tóth Sándor, Sárospatak (13-15., 17., 18.); Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely (13-18.).

KÖNYVISMERTETÉS

Csete Lajos

Jól felkészültem-e? Matematikai feladatsorozatok

(szerzők: Vincze I., Mike J., Kosztolányi J.)

A Jól felkészültem-e? sorozat néhány könyve:

- *Vincze István: Matematikai feladatsorozatok általános iskolásoknak 7. osztály* (103 oldal, 198 Ft),
- *Mike János: Matematikai feladatsorozatok általános iskolásoknak 8. osztály* (72 oldal, 198 Ft),
- *Kosztolányi József: Matematikai feladatsorozatok középiskolába készülőknek, 13-15 éveseknek* (127 oldal, 242 Ft).

Mindhárom könyv a szegedi MOZAIK Oktatási Stúdió kiadásában jelent meg 1994-ben.

Az jutott eszembe, midőn megpillantottam a Jól felkészültem-e? sorozat matematikai példatárait, hogy bizonyos okok miatt matematikából mennyire felkészületlenül léptem át a kitűnő, vidéki Kapuvári Gimnázium küszöbét 14 évesen. A néhány jelentős tanárral rendelkező iskola neve jelenleg Felsőbüki Nagy Pál Gimnázium, Kapuvár. (A továbbtanulásra jelentkezett és felvételt nyert tanulók aránya szerint az elmúlt tanévben az ötödik helyen szerepelt a hazai gimnáziumok rangsorában, de már előfordult a második helyen is.) Ábrahám József tanár úrnál hamar rádöbbentem hiányosságaimra. Később különben a kiváló matematikatanár roppant egyszerű és hatásos módszerével megkedveltette a matematikát.

Kellemetlen saját tapasztalatomból is állíthatom, hogy a középiskolába tartó tanulót érdemes felkészíteni egy kicsit. Persze a felkészítést érdemes már a 8. osztály előtt megkezdeni. Nehogy a kezdeti középiskolai kudarcok hatására a diák megutálja a matematikát. Ekkor ugyanis biztosak lehetünk benne, hogy a tanuló középiskolai pályafutása göröngyös lesz.

Az említett példatárak alkalmasak arra, hogy segítségükkel képzettebb tanulókat engedjünk középiskolába. A példatárak szerzői az elmúlt évtizedben alapos tapasztalatokat szereztek a 7. osztályos, 8. osztályos korú és a 14 éven felüli tanulók nevelésében, mégpedig a szegedi Radnóti Gimnáziumban. Egyikük (Kosztolányi József) jelenleg egyetemi tanársegéd a József Attila Tudományegyetemen. Mindhárman korábbi feladatgyűjtemények szerzői.

A vizsgált könyvek lektorai a kitűnő, szigorú dr. Duró Lajosné egyetemi docens, aki Szeged Tudományegyetemén a matematika tanítását tanítja, emellett tiszteletet parancsoló

módon gyakorló gimnáziumi tanár. Másrészt az ismert dr. Scharnitzky Viktor főiskolai tanár, többek között számtalan felvételi feladatgyűjtemény és könyvkritika szerzője.

A Jól felkészültem-e? sorozat példatáraiban megtalálhatjuk a feladatok megoldásait és ellenőrző feladatsorok is szerepelnek a könyvekben.

A Vincze István tanár úr által írt példatár (7. oszt.) témakörei:

Gondolkozz és számolj! (99 feladat)
Síkidomok, testek (64 feladat)
Hozzárendelés, függvény, sorozat (55 feladat)
Geometriai transzformációk (62 feladat)
Algebrai kifejezések (36 feladat)
A háromszögek és a négyszögek tulajdonságai (36 feladat)

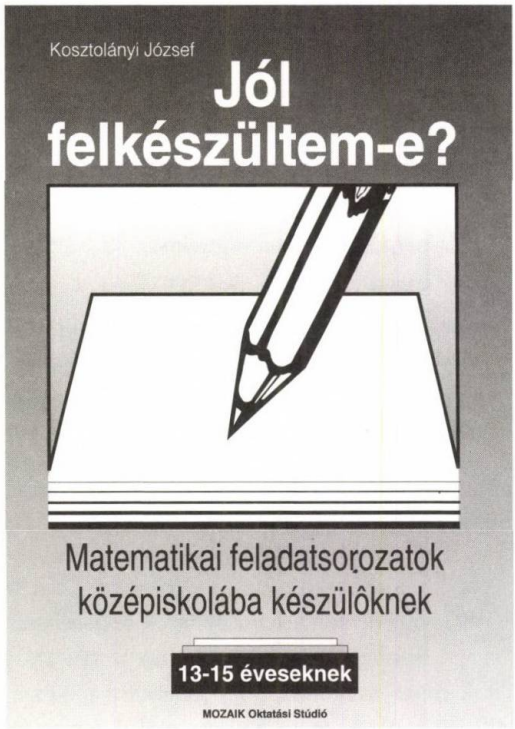
A Mike János tanár úr 8. osztályosok számára írt példatárában:

Gondolkozz és számolj! (58 feladat)
Síkidomok, felületek, testek (52 feladat)
Relációk, függvények, egyenletek, egyenlőtlenségek (44 feladat)
Geometriai transzformációk (50 feladat)
Algebrai kifejezések, egyenletek, egyenlőtlenségek (48 feladat)
Adott tulajdonságú pontok halmaza (33 feladat)
Kombinatorika, valószínűség (21 feladat)

Míg Kosztolányi József tanár úr 13–15 éveseknek írt példatárában:

Halmazok, számhalmazok, számelmélet (43 feladat)
Algebrai kifejezések (26 feladat)
Egyenletek, egyenlőtlenségek (20 feladat)
Függvények, sorozatok (28 feladat)
Ponthalmazok, síkidomok (45 feladat)
Geometriai transzformációk (50 feladat)
Térgeometria (31 feladat)
Kombinatorika, valószínűségszámítás (17 feladat)
Ellenőrző feladatsorok (50 feladat)

Az első könyvben 352 feladat, a másodikban 306 feladat, míg a harmadik példatárban 310 feladat szerepel összesen, végeredményekkel illetve megoldásokkal. A diákok önállóan is használhatják a feladatgyűjteményeket. még akár tanári irányítás nélkül is. A tanulók segítségükkel felmérhetik, hogy mennyire jártasak a különféle témakörökben. A tanár segítséget kap, hogy mit erőltessen a tanulóknál.



Csete Lajos

Egy izgalmas szélsőértékfeladat-család

Az izoperimetrikus problémakör (szerző és a kiadó dr. Major Zoltán, 1993., 96 oldal)

A zöld borítójú könyvecske az alcímben jelzett szép geometriai témakörrel foglalkozik. Az alapprobléma az, hogy az adott kerületű síkidomok közül melyiknek a legnagyobb a területe. Természetesen a körnek, ám ezt nem is olyan könnyű igazolni. Sok kitűnő matematikus foglalkozott e problémával.

Úgy tűnik, hogy már régen is próbálták alkalmazni az izoperimetrikus alakzatok elméletét. Legalábbis a legenda szerint Dido királylány menekülésekor Afrika partjain kikötve egy izoperimetrikus problémát oldott meg. Dido földet akart vásárolni, akkorát, amekkorát egy marhabőrrel be tud keríteni. Természetesen a helyi uralkodó könnyen beleegyezett ebbe. Kíváncsi lettem volna, az uralkodó arcára, amikor Dido vékony csíkokra vágta a marhabőrt és ezeket összecsomózva, jókora területet kerített körül. Így alapították meg Karthágót a monda szerint.

További tényeket olvashatunk röviden a probléma történetéről az ókori görögöktől kezdve, Jacob Steineren át egészen Szőkefalvi-Nagy Béla és Fejes Tóth László akadémikusokig.

A könyvecskében megtalálhatjuk az izoperimetrikus tétel egy szép bizonyítását. 11 kidolgozott példát és 240 kitűzött feladatot találhatunk a műben. Néhány szép feladat: Melyik az a legkisebb kör, amelyikben a K kerületű konvex négyszög elfér? A K kerületű konvex n szögek közül melyik fér el a legkisebb körben? Az F felszínű tetraéderek közül melyiknek maximális a térfogata? Az F felszínű tetraéderek közül keressük meg azt, amelyikben az élek összege maximális!

Szerintem a számos összegyűjtött feladat a könyv legnagyobb értéke. A feladatokhoz útmutatást találhatunk, amelyek persze néha nagyon rövidek a könyv terjedelme miatt. De gondolkodó olvasóknak elégnek fog bizonyulni a rövid útmutatás is. A mű végén az izoperimetrikus egyenlőtlenségek 8 darab táblázatát találhatjuk szépen összegyűjtve. Dicséretes dolog, hogy az irodalomjegyzék 22 könyvet sorol fel. (Ezek közül valamelyek kétkötetesek.)

A könyvecske kiadója maga a szerző, de ez nem az ő hibája, hanem az ezidáig általam kissé gyengének ítélt hivatásos magyar matematikai ismeretterjesztő könyvkiadásé.

Nézetem szerint minden matematikatanár könyvespolcán ott a helye ennek a kis feladatgyűjteménynek. Ezenkívül a matematika iránt érdeklődő középiskolás tanulók és a leendő tanárok forgathatják haszonnal.

A MOZAIK tankönyvajánlata az 1995/96-os tanévre

KÉMIA

Kémiai feladatsorozatok 7., 8. o.
Kémia tankönyv I. osztály
Rendszerező kémia mintapéld., feladatokkal
Kémiai zsebkönyv középiskolásoknak
Versenyezni jó! - Kémiai versenyfeladatok
Éretts. - felv. feladatok KÉMIA ('89-'92)

FIZIKA

Fizika 12 éveseknek (tankönyv 6. osztály)
Fizika munkafüzet 12 éveseknek
Fizika 13 éveseknek (tankönyv 7. osztály)
Fizika munkafüzet 13 éveseknek
Fizika 14 éveseknek (tankönyv 8. osztály)
Fizika munkafüzet 14 éveseknek
Fizikai feladatsorozatok 6., 7., 8. o.
Fizikai feladatsorok középisk. készülőknek
Fizikai feladatok gyűjt. 12-16 éveseknek
Hogyan oldjunk meg fizikai feladatokat?
Fizikai zsebkönyv általános iskolásoknak
Fizikai kísérletek, játékok elektronokkal
A Budó Ágoston fizikai versenyek '79-'90
Húsz or hat - Fizikai feladatsorok felv.
Éretts. - felvételi feladatok FIZIKA ('89-'93)
Fizikai feladatok és tévedések

BIOLÓGIA

Komplex mf. biológiából 6., 7., 8. o.
Biológiai tesztsorozatok ált. iskolásoknak
Biológiai feladatsorozatok II., III., IV. o.
Biológiai tesztek középiskolásoknak
Így oldunk meg genetikai feladatokat
Biológiai feladatok középiskolásoknak
Biológiai összefüggések, logikai vázlatok
Biológiai fogalmak és összehasonlító tábl.
Az egyedfejlődés alapjelenségei
Éretts. - felv. feladatok BIOLÓGIA ('89-'92)
Válogatás a biológia érettségi-felvételi feladatokból ('82-'93)

MATEMATIKA

Matematikai ismeretek 13 -14 éveseknek
MATEMATIKA Összefoglaló fgy. 10-14 év.
MEGOLDÁSOK a mat. összef. f.gy.-hez I-II.
Matematikai feladatsorozatok 5., 6. o.
Matematikai feladatsorozatok 7., 8. o.
Mat. feladatsorozatok középisk. készülőknek
Érdekes matematikai feladatok
Matematikai versenytesztek '91-'93
Matematikai versenytesztek '94
Néhány tipikus problémaszituáció mat.
Matematikai fogalmak, tételek
Matematika tesztkönyv I-II. (15-16 év.)
Matematikai tehetséggondozás 15 é. korban
Határértékszámítás
Mat. feladatsorok (Egyenletek, trig., log.)
Nevezetes egyenlőtlenségek
Geomet. feladatok megold. mat. háttere
Éretts. - felv. feladatok matematika ('89-'93)

FÖLDRAJZ

A Föld, amelyen élünk tankönyv 5-6. o.
A Föld, amelyen élünk mf. 5-6. osztály
Földrajzi feladatsorozatok 6. osztály
Kis mester a földrajzhoz 6. osztály
Tájékozódás a térképen - Topogr. gyak.
Szórakoztató földrajz - Földrajzi rejtvények
Földrajzi fogalmak kislexikona
Természetföldrajz I. - A Föld belső erői
Természetföldrajz II. - A Föld külső erői
Éretts. - felv. feladatok FÖLDRAJZ ('89-'93)

Vastag betűvel kiemelt kiadványaink szerepelnek az 1995/96-os minisztériumi tankönyvjegyzéken.

imosoft

MOZAIK

A matematika TANÍTÁSA

MÁRCIUS ára: 90,- Ft III. évf. / 2. szám

TARTALOM

TERMÉSZETES SZÁMOK ADDITÍV ELŐÁLLÍTÁSA
Török Tamás, Esztergom

TON A TUDOMÁNY ÉS A (MATEMATIKAI) KÉPZÉS EGY KORSZERŰBB FELFOGÁSA FELÉ
Verner Peschek és Edith Schneider, Klagenfurt, Vancsó Ödön, Budapest

KÉT GONDOLAT 1995-RŐL
Kocsis Orsolya, Szolnok

EGY ÁLTALÁNOSÍTOTT FELADAT TÉRBELI ANALÓGJA
Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

HÍREK VERSENYEKRŐL

MATEMATIKA FELADATMEGOLDÓ PONTVERSENY IV. FORDULÓJÁNAK FELADATAI

MATEMATIKA FELADATMEGOLDÓ PONTVERSENY II. FORDULÓJÁNAK MEGOLDÁSA

FELADATROVAT TANÁROKNAK

Már az alsó tagozat kombinatorika témakörének követelményei között is szerepel [3], hogy a tanulók egyszerűbb feladatoknál képesek legyenek az összes lehetőség megtalálására, táblázatban vagy fadiagramon rendszerezve az eseteket.
(3. oldal)

Első pillantásra a tudomány és a képzés ellentétes, szinte antagonisztikus célokat követ: míg az előbbi mindenekelőtt arra irányul, hogy az emberi tudást kiszélesítse, megújítsa és átalakítsa, tehát az emberi gondolkodásban és tevékenységben rejlő innovatív változási lehetőségeket...
(7. oldal)

Egy régi tréfa szerint minden természetes szám érdekes, hiszen ha volnának olyanok, amelyek nem érdekesek, akkor volna közöttük egy legkisebb is és ennek a számnak éppen az volna az érdekessége, hogy ő az első, amelyik nem érdekes. Vagyis az első érdektelen szám is érdekes.
(15. oldal)

MÓDSZERTANI FOLYÓIRAT

A MATEMATIKA TANÍTÁSA
módszertani folyóirat

Szerkesztőség:
Főszerkesztő: Dr. Urbán János
Szerkesztőség címe:
6723 Szeged, Debreceni u. 3.
Tel.: (62) 312-988,
FAX: (62) 328-247

Kiadó:
MOZAIK Oktatási Stúdió Kft
Felelős kiadó: Török Zoltánné
Tördelő szerk.: Kovács Attila
Borítóterv: Magyar Csaba

Megrendelhető:
MOZAIK Oktatási Stúdió
6701 Szeged, Pf. 301.
Éves előfizetési díj: 450 Ft

A lap megvásárolható a MOZAIK Könyvesboltokban: Szeged, Csongrádi sgt. 73. Budapest VIII., Üllői út 70.

Megjelent a Művelődési és Közoktatási Minisztérium támogatásával.

A matematika tanításában megjelenő valamennyi cikket szerzői jog védi. Másolásuk bármilyen formában kizárólag a kiadó előzetes írásbeli engedélyével történhet.

ISSN 1216-6650

Készült a Dürer Nyomda Kft-ben
Felelős vezető: Székely András

TARTALOM

TERMÉSZETES SZÁMOK ADDITÍV ELŐÁLLÍTÁSA
Török Tamás, Esztergom

ÚTON A TUDOMÁNY ÉS A (MATEMATIKAI) KÉPZÉS EGY KORSZERŰBB FELFOGÁSA FELÉ
Werner Peschek és Edith Schneider, Klagenfurt, Vancsó Ödön, Budapest

KÉT GONDOLAT 1995-RŐL
Kocsis Orsolya, Szolnok

EGY ÁLTALÁNOSÍTOTT FELADAT TÉRBELI ANALÓGJA
Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

HÍREK VERSENYEKRŐL

A MATEMATIKA FELADATMEGOLDÓ PONTVERSENY IV. FORDULÓJÁNAK FELADATAI

A MATEMATIKA FELADATMEGOLDÓ PONTVERSENY II. FORDULÓJÁNAK MEGOLDÁSA

FELADATROVAT TANÁROKNAK

Közlési feltételek:

A közlésre szánt kéziratokat gépelve két példányban vagy floppy lemezen küldjék meg a szerkesztőség címére. A kéziratok lehetőleg ne haladják meg a 6-8 gépelt oldalt (oldalanként 30 sorban 66 leütés).

A rajzokat, ábrákat, táblázatokat és fényképeket külön lapon megfelelő szövegezéssel kérjük ellátni. (A szövegrészben pedig zárójelben utaljunk rá.)

Kérjük, hogy a szövegbeli citálások név és évszám jelöléssel történjenek, míg a tanulmányok végén a felsorolt irodalmak alfabetikus sorrendben készüljenek.

Kérjük szerzőtársainkat, hogy a kéziratok beküldésével egyidejűleg szíveskedjenek közölni pontos címüket, munkahelyüket és beosztásukat, a megjelent cikkek utáni honorárium kifizetése érdekében személyi számukat. A cikk megjelenése után a lemezeket visszaküldjük.

Török Tamás

Természetes számok additív előállítása (Színes rudak szőnyegezése)

Már az alsó tagozat kombinatorika témakörének követelményei között is szerepel [3], hogy a tanulók egyszerűbb feladatoknál képesek legyenek az összes lehetőség megtalálására, táblázatban vagy fadiagramon rendszerezve az eseteket.

Ez az igény felső tagozatban már komolyabb feladatoknál is jelentkezik. Az összes eset megtalálása, számának meghatározása sok esetben olyan számítások alapján történik, amelyek általánosításai a középiskolában bevezetésre kerülő kombinatorikai alapképletekhez vezetnek.

A címben megjelölt probléma tulajdonképpen jelen van az alsó és felső tagozat, a középiskola, a tanító- és tanárképző főiskolák matematika anyagában egyaránt, természetesen más-más nehézségi fokkal; eszközhasználattal párosulva (színes rudak szőnyegezése) ill. anélkül.

Szórványosan találunk e tárgykörben szakirodalmat [1-2, 4], de ezek vagy megmaradnak a tiszta elmélet szintjén (2), vagy csak feladatokat tartalmaznak [1, 4], nem mutatják be a megoldáshoz vezető út keresésében az elmélet jelentőségét, ill. közvetlenül az elméletből adódó feladatok szélesebb skáláját.

Célszerűnek láttam összefoglalni azokat a legfontosabb elméleti ismereteket, amelyek egyrészt egy tetszőleges természetes szám összes additív előállítását meghatározzák (az összeadandók sorrendjét is figyelembe véve ill. attól eltekintve), másrészt érdekes összefüggésekre hívják fel a figyelmet a különböző előállítások száma között.

Ezen ismeretek birtokában bátran adhatunk és mutathatunk be olyan felbontási (szőnyegezési) feladatokat tanulóinknak, ahol az összes lehetőség előállítását, számszerű meghatározását is elvárhatjuk. Ezáltal az ide tartozó feladatok megoldását segíteni és ellenőrizni is tudjuk.

Végül néhány (különböző korosztálynak szóló) feladattal szeretném alátámasztani, hogy pusztán az elmélet (legalább ismeretszintű birtoklása) mennyiben segítheti a tanítói-tanári munkát.

1. definíció (additív előállítás, szőnyegezés): Ha az n természetes számot előállítjuk egy

$$n = a_1 + a_2 + \ldots + a_m \qquad (1)$$

összeg alakjában, ahol $a_1, a_2, \ldots, a_m$, szintén természetes számok, akkor azt mondjuk, hogy n-et m részre osztjuk (az n hosszúságú rudat m darab, nála rövidebb rúddal szőnyegezzük). Nyilván $1 \leq m \leq n$.

2. definíció (lényegesen nem különböző előállítások): Az n természetes szám (1) alatti két előállítását lényegesen nem különbözőnek nevezzük, ha azok csak az összeadandók sorrendjében térnek el egymástól.

Jelölje $F(n, m)$ az n természetes szám m részre való felbontásainak számát az összeadandók sorrendjét (a lényegesen nem különböző előállításokat) is figyelembe véve.

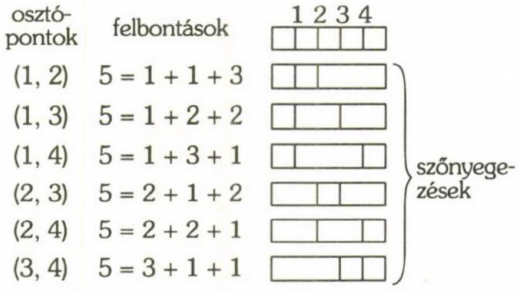
$F(n, m)$ meghatározása

1. ábra

Ha az 1, 2, 3, ..., $n-2$, $n-1$ osztópontok közül $(m-1)$-et kiválasztunk (legyenek ezek $O_1 < O_2 < \ldots < O_{m-1}$), akkor ehhez megfelel-

tethető n-nek egy (1) alatti előállítása, ahol $a_1 = O_1$, $a_2 = O_2 - O_1$, ..., $a_m = n - O_{m-1}$.

És fordítva: n bármely (1) alatti $a_1 + a_2 + \ldots + a_m$ előállítása egyértelműen azonosítható az $O_1 = a_1$, $O_2 = a_1 + a_2$, ..., $O_{m-1} = a_1 + \ldots + a_{m-1}$ osztópontokkal.



2. ábra

Tehát minden $1 \le m \le n$-re:

$$F(n,m) = \binom{n-1}{m-1}. \qquad (2)$$

Ez alapján például $F(5, 3) = 6$, vagyis az 5 cm hosszúságú, citromsárga rúd összes kirakása három rúddal az 1, 2, 3, 4 osztópontok közül kettő, minden lehetséges kiválasztásának számával egyenlő (2. ábra).

Jelölje $F(n)$ az n összes felbontását az összeadandók sorrendjét is figyelembe véve. Akkor

$$F(n) = F(n,1) + F(n,2) + \ldots + F(n,n) =$$
$$= \binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \ldots + \binom{n-1}{n-1} = 2^{n-1} \qquad (3)$$

Az alábbiakban táblázatba foglaljuk $F(n, m)$; $1 \le m \le n \le 10$ értékeit.

	m										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
n	$F(n, m)$										$F(n)$
1	1										1
2	1	1									2
3	1	2	1								4
4	1	3	3	1							8
5	1	4	6	4	1						16
6	1	5	10	10	5	1					32
7	1	6	15	20	15	6	1				64
8	1	7	21	35	35	21	7	1			128
9	1	8	28	56	70	56	28	8	1		256
10	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	1024

1. táblázat

$F(n)$ (3) alatti előállítása és az 1. táblázat alapján azt is mondhatjuk, hogy a lényegesen nem különböző felbontásokat is tartalmazó előállítások számát a Pascal-háromszög írja le.

3. definíció (lényegesen különböző előállítások): Ha az n természetes szám (1) alatti felbontásánál kikötjük, hogy $a_1 \ge a_2 \ge \ldots \ge a_m \ge 1$, akkor az n szám m részre való, lényegesen különböző felosztásairól beszélünk.

Ebben az esetben nyilván a különböző m részre osztások összeadandói eltérnek (legalább két elemben) egymástól.

Jelölje $f(n, m)$ az n természetes szám m részre való felbontásainak számát, az összeadandók sorrendjét figyelmen kívül hagyva (csak a lényegesen különböző előállításokat tekintve).

f(*n*, *m*) meghatározása

Az $f(n, m)$-ekre sajnos nem adható meg az $F(n, m)$-ekre levezetett összefüggéshez hasonló zárt képlet. Az $f(n, m)$ számok viszont kielégítik az alábbi rekurzív összefüggést:

$$f(n,1)+f(n,2)+\ldots+f(n,k)=f(n+k,k)$$
$$f(n,1)=f(n,n)=1 \qquad (4)$$

A bizonyítás megtalálható [2]-ben. A (4) összefüggésnek az a mondanivalója, hogy egy n szám legfeljebb k részre való, lényegesen különböző előállításainak száma megegyezik az $n + k$ szám pontosan k részre való, hasonló előállításainak számával.

	m																
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
n	*f*(*n*, *m*)																*f*(*n*)
1	1																1
2	1	1															2
3	1	1	1														3
4	1	2	1	1													5
5	1	2	2	1	1												7
6	1	3	3	2	1	1											11
7	1	3	4	3	2	1	1										15
8	1	4	5	5	3	2	1	1									22
9	1	4	7	6	5	3	2	1	1								30
10	1	5	8	9	7	5	3	2	1	1							42
12	1	6	12	15	13	11	7	5	3	2	1	1					77
16	1	8	21	34	37	35	28	22	15	11	7	5	3	2	1	1	231

2. táblázat

Ez azt jelenti például, hogy az 5 szám legfeljebb 3 összeadandóra való, lényegesen különböző felbontásainak száma megegyezik a 8 pontosan 3 részre való hasonló felosztásainak számával. A (4) összefüggés alapján készült a 2. táblázat.[1]

Igaz továbbá a lényegesen különböző előállítások alábbi két érdekes tulajdonsága.[2]

1. tulajdonság: Az n szám olyan felbontásainak száma, amelyekben k a legnagyobb rész, egyenlő az n szám pontosan k részre való felosztásainak számával.

Ha például $n = 6$ és $k = 3$, akkor

$$3 + 1 + 1 + 1,\ 3 + 2 + 1,\ 3 + 3$$

a 6 azon felbontásai, amelyekben 3 a legnagyobb szám. A 6 három részre való felbontásai pedig:

$$4 + 1 + 1,\ 3 + 2 + 1,\ 2 + 2 + 2.$$

2. tulajdonság: Az n szám páronként különböző részekre való felosztásainak száma egyenlő az n olyan felbontásainak számával, amelyekben minden rész páratlan.

Ha például $n = 7$, akkor a

$$7,\ 6 + 1,\ 5 + 2,\ 4 + 3,\ 4 + 2 + 1$$

a 7 azon felbontásai, amelyekben az elemek páronként különböznek. Ugyanakkor a 7 csak páratlan részeket tartalmazó felbontásai:

$$7,\ 5 + 1 + 1,\ 3 + 3 + 1,\ 3 + 1 + 1 + 1 + 1,$$
$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1.$$

[1] A táblázat a színes rúdkészlet elemeinek előállításait tartalmazza.

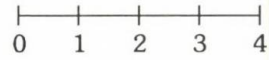
[2] A bizonyítás megtalálható [2]-ben.

Ajánlott feladat

Alsó tagozat

1. Szőnyegezd a 4 cm hosszúságú piros rudat az összes lehetséges módon!

a) Jegyezd le szőnyegezéseid aszerint, hogy a szőnyegező elemek mely osztópontoknál találkoznak!



b) Rendszerezd szőnyegezéseid az alábbi táblázatba!

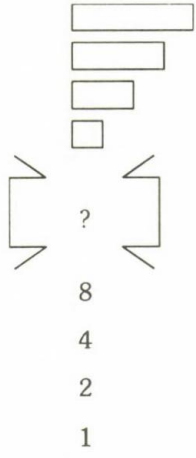
Osztópontok		A szőnyegező elemek száma	Az előállítások	Összesen
Hány db?	Melyek?			
3	(1, 2, 3)	4	ffff	1
2				
1				
0				

c) Azokból az előállításokból csak egy darabot hagyj, amelyek csak az összerakás sorrendjében különböznek (egyébként az elemek ugyanazok)!
Így hányféle szőnyegezést kaptál?

2. Mit csinál a gép?

a) Mit dobna ki a lila rúd esetén?

b) Melyik rúdnál jönne ki 128?

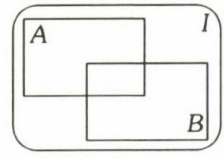


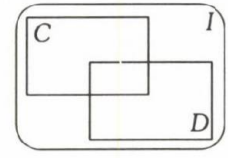
Felső tagozat

3. Állítsuk elő a 7-et pozitív összeadandókból, az összes lehetséges módon!

a) Melyek lehetnek az előállítások rendezésének durvább és finomabb szempontjai?

b) Tekintsük csak a lényegesen különböző előállításokat (I)!





A – minden rész különböző,
B – minden rész páratlan,
C – a legnagyobb rész 3,
D – 3 részre való felosztások.
Töltsük ki a halmazábrákat!
Mi a kapcsolat az *A* és *B* ill. a *C* és a *D* halmazok elemszáma között?

c) Próbáld meg ugyanezt a 6-tal, majd általánosíts!

4. Szőnyegezd a 10 cm hosszúságú narancssárga rudat csak fehér és rózsaszín rudak felhasználásával, lényegesen különböző módon!

Írd fel nyitott mondat formájában, hogy mit jelent ez! Add meg a nyitott mondat összes lehetséges megoldását, majd állítsd elő az ezeknek megfelelő szőnyegezéseket!

Középiskola

5. Igazoljuk a (2) és (3) alatti összefüggéseket!

Létesítsünk kapcsolatot az additív előállítások száma és a Pascal-háromszög elemei között!

Igaz-e, hogy az $F(n)$ mértani sorozat?

6. Jelölje $f(n, m)$ az n természetes szám összes

$$n = a_1 + a_2 + \ldots + a_m;$$
$$a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_m \geq 1$$

felbontásainak számát!

Ellenőrizd a (4) alatti, ún. rekurzív definíciót $n = 5$; $k = 3$ esetén!

Fogalmazd meg a saját szavaiddal is a rekurzió mondanivalóját! (A tétel bizonyítása tagozatos osztályokban tárgyalható.)

Irodalom

[1] Balogh Viktória - Czeglédi István - Dr. Vörös György: A matematika tanítása III., 356-357. oldal, Tanárképző főiskolák, egységes jegyzet Tankönyvkiadó, Budapest, 1985.

[2] Ioan Tomescu: Kombinatorika és alkalmazásai, 60-68. oldal,Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1978.

[3] Országos Pedagógiai Intézet: ÚTMUTATÓ az általános iskolai matematika tananyagának korrekciójához 1-4. osztály, 61. oldal, Budapest, 1986.

[4] dr. Pelle Béla: Így tanítjuk a matematikát I., 128-131. oldal, Tankönyvkiadó, Budapest, 1978.

Werner Peschek - Edith Schneider - Vancsó Ödön

Úton a tudomány és a (matematikai) képzés egy korszerűbb felfogása felé

Első pillantásra a tudomány és a képzés ellentétes, szinte antagonisztikus célokat követ: míg az előbbi mindenekelőtt arra irányul, hogy az emberi tudást kiszélesítse, megújítsa és átalakítsa, tehát az emberi gondolkodásban és tevékenységben rejlő innovatív változási lehetőségeket mutasson fel, addig a képzés inkább a meglevő tudást kívánja megőrizni és reprodukálni. A tudományos eredményeket gyakran, mint az emberi megismerés nagy előrelépéseit ünneplik, míg ennek következményeit a képzés területén inkább a megszokott képzési rendszerrel szembeni fenyegetésként fogadják. (Ez az ellentétes fogadtatás nagyon jól megfigyelhető például a számológépek illetve számítógépek iskolai felhasználása körüli didaktikai vitákban.) Közelebbről megvizsgálva azonban ezek a tudomány és képzés közötti ellentétek feloldódnak, és sok közös vonás fedezhető fel: a képzés majdnem mindig tudományos képzést is jelent (legalábbis a képzés maga mind tartalmában, mind módszertani elveiben tudományorientált), legfőképpen azonban mindkettő ugyanarra a társadalmi kontextusra vonatkozik, annak elkötelezett és nemcsak gazdaságilag, hanem jóval általánosabban, ezáltal meghatározott.

Tudomány, képzés és társadalom ebben az értelemben egy egységet képez, ha valamelyik területen változás következik be, az csak a másik két területtel összefüggésben érthető meg. A következőkben megkíséreljük vázolni a mai fejlődést a tudomány, a képzés és a társadalom területén, természetesen ezek egymásra gyakorolt hatásaival együtt.

I. A jelenlegi helyzet

Sok évezreden át az Isten(ek)be és más magasabb hatalmakba vetett hit volt a társadalom meghatározó eleme: vallások, mágusok, szerzetesek, egyházak testesítették meg ezt a hitet.

Az utolsó két-három évszázadban, különösen a felvilágosodás óta ezt a hitre épült társadalmat, *hittársadalmat* a technikai-természettudományos kornak megfelelő *megismerés és tudás társadalma* váltotta fel, ahol a termé-

szetet természeti törvényekkel írják le, azokkal számolnak és ezáltal demisztifikálják. A felvilágosodásban az Istenbe vetett hit az IGAZSÁG MEGISMERHETŐSÉGÉBE vetett hittel pótlódott, amit a tudósok és a tudomány képviselt. Ennek a képzéselméleti alapfeltételeit *a technikai-logikai racionalitás* határozza meg, s ezt röviden vázolhatjuk a következőképpen.

1. A konkrét, egyedi gyakorlati problémának mindig van általános érvényű megoldása („igazság").
2. Ezeket az abszolút, általános érvényű megoldásokat a tudomány segítségével fedezhetjük fel, kutathatjuk ki és fejleszthetjük elméletté.
3. Ezeket az elméleteket az ISKOLÁBAN és az egyetemeken lehet továbbadni.
4. A közölt elméletek a gyakorlatban alkalmazhatók és ott a gyakorlati probléma megoldásához vezetnek.

Ezen alapelvek közvetlen konzekvenciái a TANÍTÁS és TANULÁS KULTÚRÁJÁNAK következő jellemzői :

A rendszerezett tudás dominanciája

Az oktatásban közölt tudás alapvetően meghatározott (tantervek, tankönyvek), nem vitatható, nagymértékben előre strukturált és rendszerezett. A képzést úgy tekinthetjük, mint ennek a tudásnak a rendelkezésre bocsátását. Ennek megfelelően kicsi jelentőségűek a nyitott kérdések, az ellentétes vélemények és az egyéni ütközések.

A specializáció dominanciája

Az iskolai tudás messzemenőkig autonóm, egymástól független szakterületekre osztódik, ez a beosztás nagymértékben az egyes tudományterületeknek megfelelő, azaz a tudományok szerkezetét követi.

Ez a specializáció csökkenti a komplexitást, és a részterületek közötti esetleges ellentmondások felszínre kerülését, ezzel is megkönnyítve a tudás továbbadását. Egyidejűleg azonban megakadályozza egy egységes világlátás kialakulását, valamint a komplex, interdiszciplináris életszituációk, problémák megoldási módjainak a kifejlődését.

A kínálatorientált tanítás dominanciája

A tanulást, mint egy leképezési folyamatot tekinti (a tanár fejéből a diák fejébe), ahol a tanár aktív, adó, míg a tanuló passzív, befogadó szerepet játszik.

Egy ilyen leképezési folyamatot legjobban a gyakori ismétlések és sztereotip gyakorlatok segítik, melyet a tanulói (vagy a tanári) hibák, az alkotó kerülőutak, a saját kezdeményezések és a tanulók közötti kommunikáció csak hátráltatnak.

A hierarchikus kommunikáció dominanciája

A hierarchikusan szervezett tudásnak – ahol a tanárt (illetve a tankönyvet), mint a tudás forrását, és a tanulót, mint passzív befogadót tekintjük – teljesen megfelel a hierarchikus kommunikáció. A jelentős kérdéseket (útmutatásokat, feladatlapokat) a tanár teszi fel, a tanulóknak ezeket csak megválaszolni kell. A tanulók közötti érintkezés (éppígy a tanárok közötti) ebben inkább zavaró, és ezért nem kívánatos csakúgy, mint a reflexiók és a viták.

A fegyelmezettséggel kapcsolatos értékek dominanciája

A tudással közvetített alapértékek – amelyek a tudás előre strukturáltságának és a kínálatorientált tanításnak megfelelnek – mindenekelőtt a szorgalom, a kitartás, a koncentrálóképesség, a rendszeretet, az alkalmazkodási készség és a felsőbbségek iránti lojalitás.

Egy ilyen tanítási-tanulási struktúrát nevezhetünk *statikusnak* (nem magától mozgónak), mivel sem a tanártól, sem a tanulótól nem várjuk el, hogy maga problémákat állítson fel, azokat megpróbálja megragadni, a megoldást valahogyan kontrollálni; összefoglalva: kevés kiindulópont van egy belülről motivált változásra. Ez a statikus tanuláskultúra a múltban nemcsak a korábban említett képzéselméleti

alapfelfogásnak felelt meg, hanem egy inkább statikus társadalmi struktúra uralkodó érdekcsoportjainak elvárásaival is jól egyezett. A munkamegosztásra épülő társadalom messzemenőkig hierarchikusan szervezett és stabil volt, az egyes személyekkel szembeni elvárások világosan meghatározottak és csak lassú változásoknak alávetettek. Ebből adódott, hogy igazán a fegyelmezettség, a szorgalom és az alkalmazkodás voltak a keresettek, és sokkal kevésbé értékelték az önállóságot, a kezdeményezőkészséget illetve a saját felelősséget. A kooperatív munkaforma, illetve a munkával kapcsolatos kommunikáció alig volt szükséges, s ezért inkább fenyegetőnek tűntek. (Gondoljunk a szakszervezetekre, munkástanácsokra stb.)

II. Társadalmi változások

A jelenkor egyik legjelentősebb társadalmi jelensége az a hihetetlen sebesség, amellyel az emberi tudás növekszik. Új gondolkodási és cselekvési lehetőségek nyíltak és a tudás összetettsége egyre jelentősebb. (Az összes emberi tudás körülbelül minden hét évben kétszereződik meg. Egyedül a matematikai tudás ma már legalább 100 000 kötetet tesz ki, s évente kb. 40 000 cikk jelenik meg, több mint 200 000 új tétellel gazdagítva a tudásunkat.) Az utóbbi évszázadokban előnyben részesített módszerekkel csak úgy sikerült ezzel a tudásrobbanással bánni, hogy egyre nőtt a tudás résztudományokra bomlása, tehát a hierarchikusan szervezett specializáció. Ez a szakosítás azonban nem csak elmélyülést jelent, hanem mindig lehatárolódást, kizárásokat, bizonyos tények figyelmen kívül hagyását, a kapcsolatok sérüléseit is. Ha az emberiség központi megoldatlan problémáit nézzük (a béke biztosítását, az emberi jogok kérdését, a munkanélküliséget, a szociális biztonságot és igazságosságot, a környezet pusztulását), akkor ma már jól érezzük, hogy a specializációról, mint egyedüli megoldási lehetőségről le kell mondanunk. Ez másrészt azért is szükséges, mert a létrehozott rendszerek egyre összefüggőbbekké, összetettebbekké és dinamikusabbakká válnak (gondoljunk példaként a multinacionális vállalatokra, az egész világot behálózó közlekedési, hírközlési rendszerekre vagy az adatbankokra és a számítógépes hálózatokra stb.), és a régi részproblémákra bontással egyre kevésbé leírhatóak és uralhatók. Egy nagy 1985-ből származó OECD tanulmány (OECD/CERI 1985) eredményei alapján P. Posch a következő szerkezeti változásokat látja a legfontosabbaknak jelen társadalmunkban.

Szerkezetváltozás a munkahely vonatkozásában

Amilyen ütemben nő a rutintevékenységek automatizációja, úgy nő az igény a magasabban kvalifikált szakértelemre. Ehhez jön a munkavállalóktól elvárt feladatkör egyre rövidebb időközönként történő megváltozása, és az egyes munkavállalóval szembeni igények rohamos növekedése (azaz egyre gyakrabban kell az egyes személyeknek részt venniük mind a tervező, szervező és kivitelező feladatokban, mind az ellenőrzésben), és ezzel egyidejűleg egyre több döntést kell hozni alacsonyabb szinteken is. Ennek megfelelően erősen növekszik a kölcsönös függőség az egyes hierarchikus szinteken belül, és a különböző szintek között is, aminek következtében az együttműködés, a teammunka egyre nagyobb jelentőséget nyer.

A közélet szerkezetváltozása

Egyre csökken annak az esélye, hogy intézményesítve megoldhatók egy ország, egy régió problémái (pl. munkahelyteremtés, az öregkori szociális biztosítás vagy a környezetvédelem). Ezzel szemben egyre nő a kölcsönös függőség a helyi, a regionális, a nemzeti és a nemzetközi síkokon, valamint az érdekegyeztetés és az együttműködés igénye.

A magánélet megváltozása

Korunkban egyidejűleg nő mind a felhasználható szabadidő mennyisége mind a szabadidő eltöltésének választási lehetősége. Ezzel egyre nehezebbé válik megfelelő döntéseket hozni a szabadidő értelmes eltöltésére. (P. Posch 1987., 28.oldal, illetve P. Posch 1991., 400. oldal)

III. Egy korszerű tudományfogalom (Roland Fischer nyomán 1993a)

Hogyan reagálhatunk az előző fejezetben vázolt társadalmi változásokra ?

Egy lehetséges válasz a technikai-logikai racionalitás jegyében az lehetne, hogy több energiát (azaz legfőképp több pénzt) fektetünk be a tudományba, azt jobban gondozzuk, a keletkező problémákra új megoldási lehetőségeket találunk ki, illetve fejlesztünk ki. Minél értelmesebbnek és szükségesebbnek tűnik az eddiginél több pénzt fektetni a tudományba, annál kevésbé várhatjuk el, hogy a fellépő problémákra közvetlen választ adjon. Az ilyen elvárás egy tudományelméleti tévedésen alapszik.

A probléma az abszolút igazság feltételezésében van, amely tudatunktól független realitásként jelenik meg, és az ehhez kapcsolódó tudomány fogalmában. Ha még nem ismerjük az igazságot, akkor sohasem mondhatjuk biztosan, vajon ehhez az igazsághoz a tudományos ismerettel közeledünk, vagy éppen távolodunk tőle. Ha viszont az igazságot ismerjük, akkor nincs is szükség a tudományra, amely azt felfedezni hivatott. Másként kifejezve: azt, hogy a tudomány egy végérvényes megoldást talált-e, csak maga a tudomány döntheti el. De ki garantálhatja, hogy ez a tudomány valójában az igazságról szól? Mint látjuk, az ilyen érvelés és tudományfelfogás cirkuláris és emiatt legkevésbé sem kielégítő. K. Gödeltől tudjuk, hogy nem is létezik kiút ebből helyzetből: Egy elégendően összetett (formális) rendszer ellentmondásmentességét (általános érvényét, igazságát) sohasem lehet a rendszer eszközeivel bizonyítani. A következőkben R. Fischer nyomán a tudomány egy konstruktivista felfogását vázoljuk, ahol a (cselekvésünknek megfelelő) realitást, mint társadalmi konstrukciót értjük, és ezzel az abszolút (az emberi gondolkodástól független) igazságról, illetve a valóságról lemondunk.

A továbbiakban abból indulhatunk ki, hogy a tudomány termel (teremt). Első ránézésre a tudomány elsősorban folyóiratokban és könyvekben megjelenő szövegeket állít elő, amelyek mögött fogalmak, eljárások, módszerek, elméletek állnak. A tradicionális felfogás szerint az elméletek a valóságról szólnak, míg Fischer szerint ezek az elméletek maguk a valóság (annak részei). Még ha fel is tételezzük, hogy ezen elméletek mögött a valóság áll, az semmilyen direkt kapcsolatban nem áll a tudomány által létrehozott valósággal, a létrejött elméleteknek saját karaktere van, és mindenekelőtt: ezek az elméletek vezetik a cselekvéseinket, s nem a feltételezett, de általunk ismeretlen valóság. Egy rajtunk kívül álló valóság hipotéziséről úgy tűnik lemondhatunk. Természetesen nem csak a tudomány előjoga valóságot teremteni. A földművesek, a kézművesek vagy a művészek (többek között) éppúgy teremtenek. Amiben az általuk létrehozott valóság különbözik a tudományétól, az a módszerben rejlik: a tudomány érveléssel teremti a valóságát. Természetesen érvelhetnek a földművesek, kézművesek vagy a művészek is (miért olyan magas a termék ára, miért ilyen a formája stb.), de a tudománynak érvelnie kell, központi és általános módszere az érvelés, s ennek terméke egy megalapozott összefüggés. A tudomány tehát köteles érvelni (szemben pl. a művésszel), de egyben erre is van korlátozva, semmilyen hatalmat nem gyakorolhat ebből kiindulva (szemben a jogásszal). (Eszerint egy kérdés visszautasítása éppoly tudománytalan, mint egy követelmény keresztülvitele a saját (pl. tudományos) tekintélyre való hivatkozással.)

A tudományos érvelés kapcsolatok létrehozatalát és reflexiót jelent.

A kapcsolat létrehozatala összefüggések előállítását jelenti. Ez történhet matematikai-logikai következtetési láncolattal éppúgy, mint az irodalomra való utalással, egy megfigyeléssel, vagy kísérleti tapasztalattal, avagy a működőképességre, a tudományos hagyományokra hivatkozással. Mivel a tudománynak az erőszakról le kell mondania, teljesen az érvelés elfogadhatóságára van utalva. Az összefüggések megteremtése pontosan ezt a célt követi. Állításunkat azáltal fogadtatjuk el, hogy bemutatjuk hogyan következik más elfogadott állításokból. Arra azonban semmilyen kötelező sza-

bály sincs, mit nevezzünk lényeges összefüggésnek, mit meggyőző érvelésnek egy indoklási láncolat elfogadása mindig körülményektől függő döntés, teljesen függetlenül attól, hogy egyéni vagy közösségi, tudatos vagy nem tudatos. Tehát nincs abszolút és kényszerítő érvelés, az ember sohasem lehet biztos abban, vajon minden szóba jövő vonatkozást megtalálte, vajon nem bukkanhatnak-e fel ellenérvek. Emiatt a tudományos érvelésnek a kapcsolatok teremtése mellett a reflexió is nélkülözhetetlen eleme: Milyen kapcsolatokat nem vettem még figyelembe? Mit zártam ki? Milyen (nem megalapozott) feltételeket használtam? „A reflexió azt jelenti tehát, hogy gondoskodunk arról, a tudományban ne legyen definitív döntés, és hogy az érvelés folyamata végtelen legyen." (Fischer 1993a 36.oldal)

Az érvelés - kapcsolatteremtés és reflexió - motorja az ellentmondás.

Az ellentmondás a kapcsolatokkal szemben hat, mert összeköttetéseket szakít, a hálózatot sérti. Innovatív ereje éppen abban van, hogy lényegileg új reflexiókra, új kapcsolatok felépítésére, és ezzel a megismerésben előrelépésre késztet. Mint ideális alapelv, az ellentmondás a tudományban messzemenően elismert és éppenséggel az egyén szabadságjogát rögzíti, ezzel szemben a hagyományos tudomány eredményeiben és szervezetében inkább tiltott: a tudományos eredményektől éppen az ellentmondásmentességet szokás leginkább megkövetelni, ha ellentmondás van két szakterület (vagy személy) között, akkor ezt további specializációval, azaz a két terület függetlenítésével mérséklik, vagy a hierarchia legközelebbi szintjének döntésével tisztázzák (amivel előnyben részesítik azokat a személyeket, akik nem állnak szemben a szóban forgó tudománnyal). A tudománynak a fentiekben vázolt jellemzése felhívja a figyelmet a társadalom fejlődésének bizonyos perspektíváira is.

A tradicionális megismerés és tudás társadalmában a technikai-logikai racionalitás által uralt érvelés és szervezés túlélte magát (ami valószínűleg még nem is tudatosult). A valóságfogalom körfogását, a növekvő összetettségű hálózatokat, vagy sok probléma egyre nagyobb kényszerét tekintve a társadalom nem várhat már tovább egy (vélhetőleg végtelen) diskurzus végéig, hanem döntenie kell. A döntés itt azt jelenti, hogy bár elfogadva az érveléseket, a bizonytalanság és a rizikó tudatában lépni. Ebben az értelemben társadalmunk éppen átmenetben van a megismerés és tudás társadalmából *a döntés társadalmába.* A tudomány ebben biztonságot adhat (a hálózataival), de emellett kényszereket kell feloldania (a reflexió és az ellentmondás segítségével), szabad teret felmutatnia és (ezáltal) a döntés elengedhetetlenségét előtérbe helyeznie. (Lásd Fischer 1993b, 64. oldal.)

IV. A tanítás és tanulás egy új kultúrája (P. Posch nyomán 1991)

A társadalmi változások nemcsak egy új tudományfelfogást, hanem egy ennek megfelelő képzésfogalmat, egy új dinamikus tanítás-tanulási kultúrát is megkövetelnek. Egy ilyen még fejlesztendő tanuláskultúra a következőkről ismerhető fel:

A természetes környezet, mint tanulási színhely

Az iskola mellett fellép a (természeti, technikai, gazdasági, szociális, kulturális, politikai) környezet, mint tanulási színhely és egyre növekvő jelentőséget kap; a tanár és a tankönyv lassanként elvesztik az egyeduralmukat, mint tudásforrás. A tanuló által feldolgozott tudás nem világosan definiált, nem is előre strukturált illetve szisztematikusan felvezetett, hanem magasfokú összetettséget és interdiszciplinaritást mutat.

A tanulás, mint teremtő folyamat

A tanulást egyre inkább a jelentéstartalmak teremtésének folyamataként kell tekinteni, ahol a tanuló az előismereteiből és a konkrét tapasztalataiból maga építi fel az „új" tudást. Ebben az aktív, messzemenőkig maga a tanuló által alakított és az ő felelősségére építő folyamatban egyre erősebbé válik az azonosulás a problémákkal. Ezek leírása és meghatározása, feldolgozása és az automatizálható megol-

dási eljárások kidolgozása válik fontossá. Az iskola a megfelelő hozzáértés fejlesztéséhez való hozzájárulásával tesz szert egyre komolyabb jelentőségre.

A tanulás, mint szociális-kommunikatív folyamat

A tudás felépítése (a döntés megtalálása és a bizonytalanság uralása) egyre jelentősebb mértékben fogja megkövetelni az együttműködést és a párbeszédet mind a tanulók, mind a tanárok, mind a tanulók és a tanárok között, csökkenteni fogja a jelenlegi elkülönülést a tanítás és tanulás során. Átlátható csoportokban kell kidolgozni a problémamegoldások mellett elsőként a problémák leírását, globális és lokális alapkérdéseket, illetve jelentéstartalmakat és az (ön)kontroll lehetőségét. Ennek a tanulási folyamatnak fontos feltétele és tartalma kell legyen a szociális kompetencia (a tudati és érzelmi illeszkedés mellett).

Dinamikus viselkedési értékek

A fegyelmezett, statikus etikai értékeket, amelyek eddig a tanárok és tanulók viselkedését meghatározták, ki kell egészíteni dinamikus értékekkel, úgymint kezdeményezőkészség, kreativitás, önállóság, saját felelősség stb. Ez megfelelően érvényes az egyes iskolákra, mint intézményekre is. (Lásd Posch 1991, 402.oldal)

Mindent egybevetve P. Posch (1991, 402. oldal f) a képzésmódok központi fejlődési perspektíváját a hozzáértés, valamint az iskola, a tanárok és a tanulók önbizalmának növekedésében látja, hogy maguk kezdeményezzenek, kezdeményezéseiket aztán megvalósítsák és kiértékeljék. Az ilyen újításoknak a feltételei és egyben eredményei az olyan intézményes és egyéni tanulási folyamatok, amelyek az iskolán belüli együttműködési struktúrákat erősítik, s ilyen irányú külső utasításokat feltételeznek az iskolarendszer felső szintjeitől. Olyan légkör megteremtése szükséges, amely megköveteli a tanulók és a tanárok kezdeményezőkészségét, egy olyan tanári, szakmai felfogást, amely a változást előnyben részesíti, támogatja. A tanár repertoárjának bővülnie kell az iskolai munkaformákat, a saját konstrukciót, helyzetelemzést, reflexiót és a szakmai tevékenység értékelésének képességét illetően.

V. A matematikai nevelés néhány perspektívája

A legtöbb ember számára a matematika egyenértékű a „számolással". Ha ezt a „számolásfogalmat" egy kicsit szélesebben értelmezzük, beleértve minden „szabályszerű műveletet" (pl. formulák átalakítását, egyenletek megoldását, függvények vagy algebrai struktúrák szisztematikus vizsgálatát, a bizonyításoknál használt logikai-deduktív következtetési láncok fejlesztését stb.), akkor ez a fogalom tényleg a matematika egy tulajdonképpen nagyon jelentős aspektusát és tevékenységét ragadja meg. Amit azonban a szabályszerű műveletek fogalma nem tartalmaz, mégis nagyon fontos arculata a matematikának az az ábrázolás, leírás illetve az interpretáció. R. Fischer és G. Malle (1989) számára a szabályszerű műveletek mellett „az absztrakciók anyagi ábrázolása egy lényegi ismertetőjegye a matematikának" (222.oldal Fischer-Malle 1989), azaz „a matematika egy dinamikus összjátékot valósít meg az ábrázolás, az interpretáció és a műveletek között" (ugyanott a 221. oldalon). A tradicionális iskolai és egyetemi matematikaoktatásban a szabályszerű műveletek sokkal erősebben gyökeret vertek, mint az ábrázolási vagy az interpretációs aspektus. Ennek egyik oka az lehet, hogy a műveletek, mint tevékenységek a problémamegoldásban előrevivőnek tűnnek. Azonban hozzájárul az iskolai elsőbbségükhöz az is, hogy könnyen ellenőrizhető elsajátításuk, így az iskola értékelési eljárásai könnyebben alkalmazhatók rájuk. A szabályszerű műveletek területén a hagyományos matematika általában igen kielégítő eredményeket mutat fel. Ezzel szemben, mint számos tapasztalati felmérés és vizsgálat mutatja (lásd pl. Rosnick és Clement 1980, Malle 1983) az ábrázolás és interpretáció területén hatalmas hiány mutatkozik. Az ilyen hiány a matematikaoktatást mindig is terhelte, mert az alkalmas ábrázolás és annak adekvát értelmezése teszi egyáltalán lehetővé a

szabályszerű műveleteket, ennek kifejtését (lásd Fischer és Malle 1989). A társadalmi (beleértve a technológiai) fejlődés szempontjából ez a hiány a jövőben egyre nagyobb jelentőséget fog kapni és a mai matematikaoktatást alapvetően meg fogja kérdőjelezni. Ennek leglényegesebb okai közvetlen összefüggésben vannak a korábban vázolt társadalmi változásokkal illetve az új tanítási-tanulási kultúra követelményeivel (vesd össze Fischer és Malle 1989, 22l.oldal).

A szabályszerű műveletek kiiktatása

Egy eszköz alkalmazását tekinthetjük egyrészt bizonyos képességek kiiktatásának, s ezzel specializációnak, másrészt viszont a túlzott specializáció elkerülésének is. A szakóca (az ősember első szerszáma, a pattintott kő) növeli az emberi kéz ütőerejét (specializáció), de egyidejűleg szükségtelenné is teszi, hogy a kezünket magunknak kelljen erre a tevékenységre kiképezni; a közlekedési eszközök használatával lehetővé válik a nagyon gyors helyváltoztatás, anélkül, hogy magunknak kellene ezt a képességet (tehát a nagyon gyors mozgást) elsajátítanunk az írás lehetővé teszi, hogy kiiktassuk az emlékező tehetségünket, mégis ezzel egyidejűleg növeli is azt (felszabadítva egy nagy kapacitást), vagy a logikai strukturális kapcsolatok és eljárások kiiktatása (egy összetett valóságos helyzetben) azzal a céllal, hogy ezeket a matematika rendszerén belül hatékonyabban lehessen feldolgozni. Minden matematikai formula tekinthető egy kiiktatott modulnak, amelyet hatékonyan vethetünk be a megfelelő helyzetben, s így a munka lényegesen leegyszerűsödik és felgyorsul. A számológéppel rengeteg számítást (aritmetika), a számítógéppel pedig minden szabályszerű műveletet kiiktathatunk, a gépek ezt átveszik tőlünk. Az elektronikus számítógépek bevetésével az emberiség azt a képességét, hogy gyorsan és biztosan tudjon szabályszerű műveleteket végrehajtani, lényegesen továbbfejlesztette, egyidejűleg azonban elvész ennek a képességnek, mint egyéni, szellemi tevékenységnek a (társadalmi) jelentősége. Ezzel azonban a matematikai képzésben és nevelésben is egyre kevésbé legitimálható a műveletek gyors elvégzésének képessége, s egyre kevésbé képviselhető az az álláspont, hogy az évek hosszú során át folyó matematikai képzés arra irányuljon, amiben az ember képességeit a számítógépek és szoftverek messze megelőzik (pl. Derive, Mathematica). Az ember eme képességének jelentőségvesztése egyben azt is jelenti, hogy az ehhez szükséges értékek is veszítenek jelentőségükből (fegyelmezettség, kitartás, megbízhatóság) ezen a szakterületen.

A gondolkodási és cselekvési lehetőségek függősége az ábrázolástól

Az alkalmas törtábrázolás kialakulása nélkül a törtekkel való számolás nem fejlődhetett volna ki, a függvény gráfja nélkül az analízis; a tizedes tört, mint ábrázolási mód nélkül a valós számok alig elgondolhatók, vagy a Gauss-féle ábrázolás (számpár, a sík pontjai) elterjedése nélkül a komplex számok aligha lennének számoknak tekinthetők vagy elfogadhatók. Táblázatok, diagramok, szimbolikus ábrázolások segítségével olyan meggondolások, belátások és problémamegoldások lehetségesek, amelyek ezek nélkül nem lennének hozzáférhetőek. A „szemléletes" ábrázolások (az absztrakt tartalmakra) a kreatív gondolkodás eszközei, amelyek mind a tiszta matematikai, mind az alkalmazott matematikai problémákban nélkülözhetetlen gondolkozási és problémamegoldási eszközök. A társadalmi követelmények változása (a növekvő nyitottság, bonyolultság és a problémák hálószerű összefonódása) felfogható egy kihívásnak a matematikai képzés felé, a matematikai gondolkodás (pl. mint szisztematikus gondolkodás) felé és a különböző matematikai ábrázolási módokkal való kreatív bánásmód felé; a számítógép nemcsak egy ábrázolása a matematikának, hanem maga is megkövetel bizonyos ábrázolásokat (pl. számfelírás módjai, sajátos szimbolika stb.), s ezzel nagyon lényegesen meghatározza a mi gondolkodási és cselekvési módjainkat is.

Az ábrázolás meghatározza a kommunikációt

A közös problémafeldolgozás és -megoldás (teammunka) ma egyre növekvő fontosságú.

De ez azt is jelenti, hogy egyre jobban szükség van arra a képességünkre, hogy az absztrakt és összetett tartalmakról kommunikálni tudjunk. Az anyagi rögzülések ennél fontos kommunikációs eszközök. Lehetővé teszik a probléma és megoldásának definiálását, ábrázolását, leírását és interpretációját, ezzel a kommunikációt egy szélesebb tömeg számára hozzáférhetővé téve.

Hasonló érvényes az egyéni tanulási folyamatokra is. Sok vizsgálat a legutóbbi időkből (lásd pl. Davidson 1990, Schneider 1994) világossá teszi, hogy a matematikáról történő kommunikáció, a matematikai diskurzus egy lényegi építőkő a matematikai fogalmak és koncepciók kognitív fejlődésénél, és ennek az érintkezésnek a minősége döntő módon azáltal meghatározott, hogy milyen ábrázolási formákat használunk, illetve milyen képességünk van a különböző ábrázolási módokkal mozgékonyan, kreatívan bánni.

Utószó

A közölt cikk Werner Peschek előadásán alapul, amely 1994 októberében az ELTE TTK Matematikai Szakmódszertani Csoportja előtt hangzott el. Előzményei: a négy éve rendszeres osztrák-magyar matematika didaktikai konferenciák, hosszabb klagenfurti tartózkodásom, s több beszélgetés a klagenfurti egyetemen dolgozó matematika didaktikusokkal (Roland Fischer, Werner Peschek, Edith Schneider). A kapcsolat eredményeképpen Werner Peschek vendégprofesszor volt az ELTE TTK-n a 94/95-ös tanév első szemeszterében.

Azért gondoltunk a magyar publikációra, mert meggyőződésünk szerint az a megközelítés, amelyet itt olvashatunk, a hazai didaktikából teljességgel hiányzik. (Nálunk a matematika didaktikája sokkal inkább magában a matematikában illetve az iskolai matematikában gyökerezik, a fő kérdések a meglevő matematikatanítási struktúrán belüliek, maga a struktúra ritkán kérdőjeleződik meg.) Pedig alapgondolata nagyon is matematikai: ahhoz, hogy a matematika módszertanáról lehessen beszélni, ki kell lépni a rendszer kereteiből, ahogyan azt Gödel óta magában a matematikában is tudjuk, tehát a matematika didaktikájáról nem lehet anélkül beszélni, hogy a társadalom, a tudomány és az oktatás általánosabb összefüggéseit ne tanulmányoznánk.

Ez természetesen csak a kezdet egy olyan úton, amely meggyőződésünk szerint Magyarországon is érdeklődésre tarthat számot, tehát várjuk mindazon olvasók reakcióit, akiket bármilyen értelemben válaszadásra késztetnek a cikk gondolatai. Itt-ott kissé provokatív is a fogalmazás, de új dolgokat mindig könnyebb először kicsit kontrasztosabban megjeleníteni.

A didaktikának az itt vázolt általános elgondolásai elég jelentősek, s ebben az osztrákoknak jelentős szerep jutott. Ezekbe a kutatásokba magyar tanárok, didaktikusok is bekapcsolódhatnának. Ami még talán meglepő lehet, hogy kevés konkrét matematikát találnak benne, de talán el lehet képzelni, hogy ezek a gondolatok milyen változásokat implikálnak a matematikaórákon. Erről azonban majd remélhetőleg későbbi cikkekben fogunk beszámolni. A MAT-KAPOCS[3] céljai között szerepel olyan oktatási anyagok kidolgozása, amelyek közelebb állnak egy életközelibb, gyakorlatibb oktatási modellhez, s így remélhetőleg alkalmas MAT-KAPOCS anyagok is olvashatók, kipróbálhatók lesznek a nem túl távoli jövőben. Ilyen irányú hozzászólásokat, illetve akár konkrét anyagokat is szívesen látunk minden olvasónktól (l. A matematika tanítása, 1993. 5. szám).

Irodalom

[1] Davidson, N (kiadó) (1990): Cooperative Learning in Mathematics. Addison-Wesley Publishing Company

[2] Fischer, R. (1993a): Wissenschaft, Argumentation und Widerspruch. In:Fischer,R.Costazza,M. und Pellert,A. (kiadó): Argumentation und Entscheidung Profl, München-Wien, S. 29-43.

[3] Fischer,R. (1993b):Was soll Wissenschaft für die gesellschaft leisten? In: Fischer,R.-Costazza,M. und Pellert,A. (kiadó):

[3] A Bolyai János Matematikai Társulat keretei között létrejött önálló matematikatanár egyesület.

Argumentation und Entscheidung Profil, München-Wien, S. 29-43.

[4] Fischer, R. und Malle, G. (1989): Mensch und Mathematik BI Wissenschaftsverlag, Mannheim-Wien-Zürich

[5] Malle, G. (1983): Zur Fahigkeit von Schülern zum Aufstellen und Interpretieren von Formeln. In: Der Mathematiklehrer 2, S.11-17.

[6] OECD/CERI (1985): Changes in Work Patterns and Their Educational Implications. Synthesis of the Case Studies in the Automobile Industries. Paris, OECD/CERI (85/10).

[7] Posch, P. (1987): Gessellschaftlicher Wandel und neue Anforderungen an die Schule. In: Der öffentliche Sektor, H. l, Bd. 13, 27-37.

[8] Posch, P. (I991): Gessellschaft und Schule. In: Berger u.a. (kiadó): Zukunft der Weiterbildung. Profil, München-Wien, 397-408.

[9] Schneider, E. (1994): Analysisunterricht mit dem Computer. Dissertation, Klagenfurt.

Kocsis Orsolya

Két gondolat 1995-ről

Egy régi tréfa szerint minden természetes szám érdekes, hiszen ha volnának olyanok, amelyek nem érdekesek, akkor volna közöttük egy legkisebb is és ennek a számnak éppen az volna az érdekessége, hogy ő az első, amelyik nem érdekes. Vagyis az első érdektelen szám is érdekes. Ez persze nem tekinthető matematikai bizonyításnak, hiszen például az 'érdekesség' fogalmát sem definiáltuk. Mindenesetre évente érdekes feladatot jelent az adott évszám jellegzetes tulajdonságait felkutatni, megvizsgálni, hogy mely más számokra hasonlít és melyekre nem. A továbbiakban az 1995-ös számot nézzük meg közelebbről.

I. Évszámunkról gyorsan megállapíthatjuk, hogy a két középső számjegy összege pontosan háromszorosa a két szélső számjegy összegének. Kicsit tovább keresve ilyen számokat, elmondhatjuk, hogy legutóbb 1874-ben volt s legközelebb 2060-ban lesz ilyen évszámunk. Legelőször 1030-ban volt és 6990 után már több ilyen évünk nem is lesz. Felvetődik a kérdés, hogy összesen hány darab ilyen tulajdonságú szám létezik. A problémát precízebben így fogalmazhatjuk meg: legyen adott a négyjegyű $\overline{abcd}$ szám, melynek számjegyeire a $b + c = 3(a + d)$ összefüggés teljesül. Határozzuk meg ezen feltételnek eleget tevő számok számát! Az a, b, c, d számok mindegyike egyjegyű természetes szám, ahol $a \neq 0$. Így $(b + c)$ összeg értéke 18-nál, $(a + d)$ pedig 6-nál nagyobb nem lehet. Legyen $a + d = k$ ($0 < k \leq 6$ egész szám)! Ekkor az „a" értéke 1, 2, ..., k számok valamelyike lehet. Így a fenti egyenlőségnek a megfelelő d értékkel ($d = k - a$) k darab számpár tesz eleget.

Azaz $b + c = 3k$. Itt b értéke 0, 1, ... $3k$ lehet, így alkalmas c-vel ($c = 3k - b$) összesen $3k + 1$ számpár tesz eleget az egyenlőségnek. Ezekből következik, hogy rögzített k esetén a keresett tulajdonságú számok száma: $k(3k + 1)$. Az összes ilyen számot pedig úgy kapjuk meg, hogy a fenti szorzatot összegezzük minden lehetséges k-ra:

$$\sum_{k=1}^{6} k(3k+1) = 1\cdot 4 + 2\cdot 7 + 3\cdot 10 + \\ + 4\cdot 13 + 5\cdot 16 + 6\cdot 19 = 294$$

Azt kaptuk tehát, hogy 294 olyan négyjegyű szám létezik, melyben a százasok és tízesek helyén álló számjegyek összege háromszorosa az egyesek és ezresek helyén álló számjegyek összegének.

Tegyük fel a fenti kérdést még általánosabban: határozzuk meg azon négyjegyű $\overline{abcd}$

számok számát, melyek számjegyeire a $b + c = m(a + d)$ összefüggés teljesül, ahol $1 \le a \le 9$, $0 \le b$, c, $d \le 9$ egész szám és m természetes szám, ahol $m \le 18$.

A fenti példánk ennek speciális esete volt, ha $m = 3$.

Az $a + d$ maximális értéke $\left[\frac{18}{m}\right]$ lehet, (ahol $[x]$ jelenti az x-nél nemnagyobb legnagyobb egész számot).

$b + c$ maximális értéke pedig: $m \cdot \left[\frac{18}{m}\right]$.

A korábban leírtakhoz hasonlóan az $a + d = i$; $0 < i \le \left[\frac{18}{m}\right]$ egyenlőségnek i darab számpár, a $b + c = mi$ egyenlőségnek pedig $(mi + 1)$ darab számpár tesz eleget. Így rögzített i esetén a keresett számok száma $i(mi + 1)$, összesen pedig

$$\sum_{i=1}^{\left[\frac{18}{m}\right]} i(mi+1)$$ darab ilyen szám létezik.

II. A továbbiakban 1995 osztóival foglalkozunk.

$1995 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19$. Évszámunknak összesen 16 osztója van, s ezek között megtalálható a 19 és a 95 is. Ennek az az érdekessége, hogy ha e két számot egymás mellé leírjuk előáll a vizsgált számunk. Ez legutóbb 1976-ban volt s legközelebb 2020-ban lesz így.

Ezt a tulajdonságot a matematika nyelvén így fogalmazhatjuk meg: mi a feltétele annak, hogy az $\overline{ab}$ és $\overline{cd}$ kétjegyű számok osztói legyenek az $\overline{abcd}$ négyjegyű számnak.

Jelekben:

(1) $\overline{ab} \mid \overline{abcd}$

és

(2) $\overline{cd} \mid \overline{abcd}$

teljesüljön.

Tízes számrendszerben e számok a következő alakban írhatók fel:

(3) $\overline{ab} = 10a + b$

(4) $\overline{cd} = 10c + d$

(5) $\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d$

Az (1) akkor teljesül ha: $\frac{\overline{abcd}}{\overline{ab}}$ egész szám.

Ez részletesen leírva:

$$(7)\quad \frac{\overline{abcd}}{\overline{ab}} = \frac{1000a + 100b + 10c + d}{10a + b} = \frac{1000a + 100b}{10a + b} + \frac{10c + d}{10a + b} = 100 + \frac{\overline{cd}}{\overline{ab}}$$

Ez utóbbi egész szám, ha $\frac{\overline{cd}}{\overline{ab}}$ is az, azaz $\overline{ab}$ osztója $\overline{cd}$-nek. $\overline{ab} \mid \overline{cd}$

Vezessük be a $\overline{cd} = k\overline{ab}$ jelölést, ahol $0 < k < 10$ egész szám, tekintettel arra, hogy $\overline{cd}$ kétjegyű. Ezek után nézzük meg, mikor teljesül (2), mikor lesz $\frac{\overline{abcd}}{\overline{cd}}$ egész szám?

$$(8)\quad \frac{\overline{abcd}}{\overline{cd}} = \frac{1000a + 100b + 10c + d}{10c + d} = \frac{1000a + 100b + k(10a + b)}{k(10a + b)} = \frac{100(10a + b) + k(10a + b)}{k(10a + b)} = \frac{(100 + k)(10a + b)}{k(10a + b)} = \frac{100 + k}{k} = \frac{100}{k} + 1$$

(mivel $10a + b \neq 0$)

Ebből láthatjuk, hogy (8) csak akkor lesz egész szám, ha $\frac{100}{k}$ is az, így k lehetséges értékei csak a 100 egyjegyű osztói lehetnek: 1; 2; 4; 5. Ennek alapján meg tudjuk állapítani, hogy hány darab számra teljesül az előbbiekben leírt tulajdonság.

Ha $k = 1$ $\overline{ab}$ bármilyen kétjegyű szám lehet:

$10 \le \overline{ab} \le 99$ (90 db szám).

Ha $k = 2$ $10 \le \overline{ab} \le 49$ (40 db szám).

Ha $k = 4$ $10 \le \overline{ab} \le 24$ (15 db szám).

Ha $k = 5$ $10 \le \overline{ab} \le 19$ (10 db szám).

Összesen 90 + 40 + 15 + 10 = 155 db ilyen szám létezik.

A (8)-ból leolvashatjuk még, hogy az $\frac{\overline{abcd}}{\overline{cd}}$ hányados értéke az $\overline{ab}$ és $\overline{cd}$ választásától függetlenül:

$k = 1$ esetén 101,
$k = 2$ esetén 51,
$k = 4$ esetén 26,
$k = 5$ esetén 21 lesz.

A (7) alapján az $\frac{\overline{abcd}}{\overline{ab}}$ hányados értéke

$$\frac{\overline{abcd}}{\overline{ab}} = 100 + \frac{\overline{cd}}{\overline{ab}} = 100 + k.$$

$k = 1$ esetén 101,
$k = 2$ esetén 102,
$k = 4$ esetén 104,
$k = 5$ esetén 105 lesz.

Végül nézzük meg, hogy a leírtak hogyan általánosíthatók tetszőleges természetes számokra!

Legyen $A = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0} = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \ldots + a_1 10 + a_0$ $(n+1)$-jegyű és $B = \overline{b_k b_{k-1} \ldots b_1 b_0} = b_k 10^k + b_{k-1} 10^{k-1} + \ldots + b_1 10 + b_0$ $(k+1)$-jegyű számok. ($a_n, b_k \neq 0$, $0 \leq a_i, b_j \leq 9$)

Feladatunk meghatározni, hogy az $(n+k+2)$-jegyű $C = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0 b_k b_{k-1} \ldots b_1 b_0} = a_n 10^{n+k+1} + a_{n-1} 10^{n+k} + \ldots + a_1 10^{k+2} + a_0 10^{k+1} + b_k 10^k + b_{k-1} 10^{k-1} + \ldots + b_1 10 + b_0$ számnak mikor lesz osztója A is és B is. Az előző ennek speciális esete ha $n = 1$, $k = 1$.

C-nek osztója A, ha $\frac{C}{A}$ egész szám:

$$\frac{C}{A} = \frac{a_n 10^{n+k+1} + a_{n-1} 10^{n+k} + \ldots + a_1 10^{k+2} + a_0 10^{k+1} + b_k 10^k + \ldots + b_1 10 + b_0}{a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \ldots + a_1 10 + a_0} =$$

$$= \frac{10^{k+1}(a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \ldots + a_1 10 + a_0)}{a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \ldots + a_1 10 + a_0} + \frac{b_k 10^k + \ldots + b_1 10 + b_0}{a_n 10^n + \ldots + a_1 10 + a_0} = 10^{k+1} + \frac{B}{A}$$

Ebből megállapíthatjuk, hogy $\frac{C}{A}$ pontosan akkor lesz egész szám, ha $\frac{B}{A}$ is az, vagyis $A \mid B$. Vezessük be a $B = ma$ jelölést, ahol m természetes szám és vizsgáljuk a $\frac{C}{B}$ hányadost!

$$\frac{C}{B} = \frac{a_n 10^{n+k+1} + a_{n-1} 10^{n+k} + \ldots + a_1 10^{k+2} + a_0 10^{k+1} + m(a_n 10^n + \ldots + a_1 10 + a_0)}{m(a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \ldots + a_1 10 + a_0)} =$$

$$= \frac{10^{k+1}(a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \ldots + a_1 10 + a_0)}{m(a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \ldots + a_1 10 + a_0)} + \frac{m(a_n 10^n + \ldots + a_1 10 + a_0)}{m(a_n 10^n + \ldots + a_1 10 + a_0)} = \frac{10^{k+1}}{m} + 1$$

Azt kaptuk, hogy $\frac{C}{B}$ hányados akkor egész szám, ha m osztója a (10^{k+1})-nek.

Eredményünket így foglalhatjuk össze:

– Az A és B számok egymás mellé írásával előállított $C = \overline{AB}$ szám akkor osztható A-val is és B-vel is, ha $B = mA$ alakú, ahol m osztója a (10^{k+1})-nek és $(k+1)$ az A szám jegyeinek számát jelöli.

– Az A és B számok választásától függetlenül

a $\frac{C}{A}$ hányados értéke $10^{k+1} + m$ és

a $\frac{C}{B}$ hányados értéke $\frac{10^{k+1}}{m} + 1$.

Tuzson Zoltán

Egy általánosított feladat térbeli analógja

1. Steiner egy tétele, amit alkalmazni fogunk, a következő:

Ha S az A_1, A_2, ..., A_n térbeli anyagi pontrendszer súlypontja, akkor a tér bármely M pontjára igaz a következő összefüggés:

$$MA_1^2 + MA_2^2 + \ldots + MA_n^2 = \\ = n \cdot MS^2 + SA_1^2 + SA_2^2 + \ldots + SA_n^2, \quad (n \geq 2) \quad (1)$$

Bizonyítás: A koordináta-geometria eszközeit használva, legyenek az A_i pontok koordinátái $A_i(x_i, y_i, z_i)$, bármely $i \in \{1,n\}$ esetén.

Az általánosság csorbítása nélkül elhelyezhetjük a koordináta-rendszert úgy, hogy ennek O kezdőpontja pontosan egybeessen az S súlyponttal. Ekkor az S súlypont koordinátái:

$$S\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}, \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}, \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i}{n}\right),$$

ahol az $O \equiv S$ feltétel miatt $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n} z_i = 0$, így ha az M változó pont koordinátái $M(x, y, z)$, akkor az $f_n(M) = MA_1^2 + MA_2^2 + \ldots + MA_n^2$ jelölés bevezetésével a bizonyítandó összefüggés így alakul:

$$f_n(M) = \sum_{i=1}^{n} [(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2] = \\ = n \cdot (x^2 + y^2 + z^2) + \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) = \\ n \cdot MS^2 + f_n(S),$$

és ezzel bizonyításunk máris véget ért. (v.ö. [2].)

Megjegyzések:

1. A bizonyításból könnyen leolvasható, hogy bármely S középpontú, tetszőleges sugarú gömb bármely M pontjára az $f(M)$ összeg állandó, hiszen az $f(S)$ és az MS is állandó. Természetesen, ennek az állandónak értéke más-más a különböző sugarú gömbök esetén, de ugyanazon gömb bármely pontjára az állandó értéke ugyanaz.

2. A bizonyításból az is kiderül, hogy a tétel állítása, valamint az 1. megjegyzés igaz marad az A_1, A_2, ..., A_n síkbeli pontok esetén is, csupán itt, a gömb helyett körről van szó. Sőt mi több, a tétel és a megjegyzés kiterjeszthető tetszőleges m-dimenziójú euklideszi vektortérre is, így pl. $\mathbb{R}^m$-re is ($m \geq 2$).

2. Az előző Steiner-tétel egy alkalmazása a következő:

Ha az S súlyponttal rendelkező síkbeli (vagy térbeli) A_1, A_2, ..., A_n pontrendszer olyan tulajdonságú, hogy létezik egy olyan S középpontú, R sugarú kör (gömb), amely mind az n ponton áthalad, továbbá, ha Q ennek a körnek (gömbnek) egy tetszőleges pontja, valamint P egy tetszőleges r sugarú, ugyancsak S középpontú kör (gömb) tetszőleges pontja, akkor:

$$\frac{f_n(P)}{f_n(Q)} = \frac{PA_1^2 + PA_2^2 + \ldots + PA_n^2}{QA_1^2 + QA_2^2 + \ldots + QA_n^2} = \\ = \frac{1}{2}\left(1 + \left(\frac{r}{R}\right)^2\right) \quad (2)$$

Bizonyítás: Ezúttal is feltételezzük, hogy $S \equiv O$. A tétel alapján

$$f_n(Q) = n \cdot OQ^2 + \sum_{i=1}^{n} OA_i^2 =$$
$$= n \cdot R^2 + n \cdot R^2 = 2 \cdot n \cdot R^2,$$

továbbá

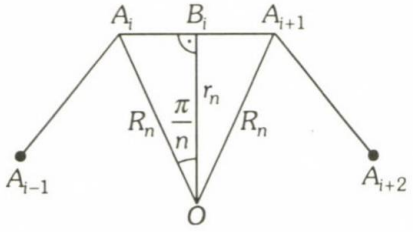
$$f_n(P) = n \cdot OP^2 + \sum_{i=1}^{n} OA_i^2 =$$
$$= n \cdot r^2 + n \cdot R^2 = n \cdot (R^2 + r^2).$$

Ez utóbbi két összefüggés arányából pontosan a (2) adódik.

3. Az általánosított feladat a következő (v.ö. [1]):

Ha egy szabályos n oldalú sokszög csúcsait A_1-, A_2-, ..., A_n-nel, beírt körének tetszőleges pontját P-vel, körülírt körének tetszőleges pontját Q-val jelöljük, akkor:

$$\frac{f_n(P)}{f_n(Q)} = \frac{PA_1^2 + PA_2^2 + \ldots + PA_n^2}{QA_1^2 + QA_2^2 + \ldots + QA_n^2} = \frac{1}{2}\left(1 + \cos^2\frac{\pi}{n}\right) \qquad (3)$$



1. ábra

Bizonyítás: Az [1] bizonyításától eltérően, a (2)-es alkalmazás segítségével bizonyítunk, ami kiterjeszthető a térbeli analóg feladat bizonyítására is. Legyen B_i a szabályos sokszög O középpontjának, egyik tetszőleges A_iA_{i+1} oldalára eső merőleges vetülete. Az 1. ábra jelöléseit használva, OA_iB_i háromszögben $\cos A_iOB_i = \frac{OB_i}{OA_i}$, vagyis $\cos\frac{\pi}{n} = \frac{r_n}{R_n}$, ahol $r_n = OB_i$, $R_n = OA_i$ pontosan a szabályos n oldalú sokszög be- illetve köréírt kör sugara. Az $\frac{r_n}{R_n} = \cos\frac{\pi}{n}$ alapján a (2)-ből a (3) azonnal adódik.

4. Gondolatok a térbeli analóg feladat létezéséről

Sokak számára természetesen merülhet fel a következő kérdés: átvihető-e az általánosított feladat (3)-as összefüggése szabályos poliéderekre is? A kérdés megválaszolása előtt lássuk be, hogy a szabályos sokszögek térbeli analógjai a szabályos poliéderek.

Mindezek mellett szembeötlő az a tény, hogy amíg bármely $n \geq 3$ esetén létezik n oldalú szabályos sokszög, addig a térben csupán 5 szabályos poliéder van: a szabályos tetraéder, a hexaéder (kocka), az oktaéder, a dodekaéder és az ikozaéder.

A „szűkítő analógia" egyik magyarázata talán az, hogy a szabályos sokszögek és a szabályos poliéderek definícióját nem ugyanazon axiómák adják, hanem csupán analóg elemek között analóg viszonyokkal (relációkkal) vannak definiálva.

(D_1) A szabályos sokszög olyan sokszög, amelynek minden oldala és minden szöge egybevágó (kongruens).

(D_2) A szabályos poliéder olyan poliéder, amelynek lapjai egybevágó szabályos sokszögek, lapszögei pedig egybevágóak.

Mindezek ellenére – Pólya György elmélete alapján – van okunk bízni az analóg tétel létezésében.

5. Az analóg feladat szabályos poliéderekre

Azt kell belátnunk, hogy mind az öt szabályos poliéder esetén, ha P a körülírt gömb, illetve Q a beírt gömb egy tetszőleges pontja, akkor az

$$\frac{f_n(P)}{f_n(Q)} = \frac{PA_1^2 + PA_2^2 + \ldots + PA_n^2}{QA_1^2 + QA_2^2 + \ldots + QA_n^2}$$

tört értéke csak a poliéder oldalainak számától függ.

Bizonyítás: A szabályos poliéderek csúcsainak száma szerint jelölje r_4, r_8, r_6, r_{20}, r_{12} illetve R_4, R_8, R_6, R_{20}, R_{12} rendre a szabályos tetraéder, hexaéder, oktaéder, dodekaéder és ikozaéder be- illetve körülírt gömbjeinek sugarait. Nyilván a beírt és a körülírt gömb középpontja egybeesik. Ha a szabályos poliéder élhosszát a-val jelöljük, akkor egyszerű számolással kiszámíthatók az r_4, R_4, r_8, R_8, r_6, R_6 értékei. Az r_{12}, R_{12} értékek kiszámolása valamivel hosszabb, az r_{20}, R_{20} kiszámolása pedig jóval terjedelmesebb. Éppen ezért, a szóban forgó sugarak kiszámolása végett a [3] enciklopédiát használtuk, ahol adott az egyes szabályos poliéderek teljes felszíne és térfogata. Így a térfogatfüggvény additivitásával kiszámíthatók a beírt gömbök sugarai, és a lapok köré írt körök sugaraiból Pitagorasz-tétellel a testek köré írt gömb sugara is. Számolásaink eredményét az alábbiakban fogalmazzuk meg.

(1) Szabályos tetraéderre:

$$r_4 = \frac{a\sqrt{6}}{12}, \quad R_4 = \frac{a\sqrt{6}}{4},$$

$$\frac{f_4(P)}{f_4(Q)} = \frac{1}{2}\cdot\left(1+\left(\frac{r_4}{R_4}\right)^2\right) = \frac{5}{9}.$$

(2) Hexaéderre (kockára):

$$r_8 = \frac{a}{2}, \quad R_8 = \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

$$\frac{f_8(P)}{f_8(Q)} = \frac{1}{2}\cdot\left(1+\left(\frac{r_8}{R_8}\right)^2\right) = \frac{2}{3}.$$

(3) Oktaéderre:

$$r_6 = \frac{a\sqrt{6}}{6}, \quad R_6 = \frac{a\sqrt{2}}{2},$$

$$\frac{f_6(P)}{f_6(Q)} = \frac{1}{2}\cdot\left(1+\left(\frac{r_6}{R_6}\right)^2\right) = \frac{2}{3}.$$

(4) Dodekaéderre:

$$r_{20} = \frac{a\sqrt{10\cdot(25+11\sqrt{5})}}{15},$$

$$R_{20} = \frac{a\sqrt{10\cdot(145+53\sqrt{5})}}{30},$$

$$\frac{f_{20}(P)}{f_{20}(Q)} = \frac{1}{2}\cdot\left(1+\left(\frac{r_{20}}{R_{20}}\right)^2\right) =$$

$$= \frac{6123+2705\cdot\sqrt{5}}{1196}.$$

(5) Ikozaéderre:

$$r_{12} = \frac{a\cdot\sqrt{3}\cdot(3+\sqrt{5})}{12},$$

$$R_{12} = \frac{a\cdot\sqrt{2(5+\sqrt{5})}}{4},$$

$$\frac{f_{12}(P)}{f_{12}(Q)} = \frac{1}{2}\cdot\left(1+\left(\frac{r_{12}}{R_{12}}\right)^2\right) = \frac{10-\sqrt{5}}{15}.$$

Tehát – akárcsak a szabályos sokszögek esetén – az $\frac{f_n(P)}{f_n(Q)}$ arány, a szabályos poliéderek esetén is állandó.

Irodalom

[1] Fitos László: Egy szabályos háromszögre vonatkozó tétel általánosítása, A matematika tanítása, 1994. évi 5. szám, 14-16. old.

[2] Liviu Niculescu, Vladimir Boskoff: Probleme practice de geometrie Editura Tehnică, Bucuresti, 1990., 137-138. old.

[3] MICĂ ENCICLOPEDIE MATEMATICĂ, Editura Tehnică, Bucuresti, 1980., 240. oldal. (Készült az 1971-ben kiadott „KLEINE ENZYKLOPÄDIE DER MATEMATIK" és az 1975-ben kiadott „MATEMATICS AT A GLACE" fordításai alapján.)

HÍREK VERSENYEKRŐL

A Varga Tamás Matematikaverseny megyei (fővárosi) fordulójának feladatai

7. osztály, I. kategória

1. Ali, Béla és Cili kártyáznak. A játék elején a gyerekek leírt sorrendjében a náluk lévő zsetonok 11 : 10 : 9 arányban oszlottak el. A játék végére ez az arány 11 :7 : 3-ra módosult.
Mennyi zseton volt a gyerekeknél a játék végén, ha tudjuk, hogy valaki 363 zsetont vesztett?

2. Az ABC derékszögű háromszög AC befogója rövidebb a BC befogónál. Az AB átfogó felezőpontja F. Az A csúcsból bocsássunk merőlegest a CF-re, a merőleges talppontja T! Az átfogó A-hoz közelebbi negyedelőpontja N! A $TNA\sphericalangle = 60°$. Mekkora a háromszög területe, ha $AB = 4$ cm?

3. Add meg az összes olyan p és q prímet, amelyekre $p^2 + q^2 + 16$ is prím!

4. Az ABC háromszögben $AB = AC$ és az $A\sphericalangle = 20°$. A B csúcshoz tartozó belső szögfelező és az AC oldal metszéspontja D. A D-re illeszkedő, AB-vel párhuzamos egyenes és a BC alap metszéspontja pedig E.
Igaz-e, hogy $BE = CD$?

5. Egy körvonalon felvettünk 1994 kék és 1 darab piros színű pontot. Vizsgáljuk az összes olyan sokszöget, amelyek minden csúcsa a felvett pontok közül való. A piros csúcsot is tartalmazó, vagy a piros csúcsot nem tartalmazó sokszögekből van több?

7. osztály, II. kategória

1. Év elején egy iskola tanulóinak 40 %-a fiú volt. Évközben a fiúk száma 10 %-kal növekedett, a lányok száma viszont 5 %-kal csökkent. Hány százalékkal változott az iskola tanulóinak összlétszáma?

2. Az ABC háromszög egyenlő szárú, $AB = AC$. Az AB szár P pontjára és az AC szár félegyenesén a C-n túli R pontra $BP = CR$.
Bizonyítsd be, hogy a BC egyenes felezi a PR szakaszt!

3. A p és $p + 2$ prímek ($p > 3$). Határozd meg $p + 4$ egyik valódi osztóját !

4. Az ABC háromszögben két magasság mindegyike legalább akkora, mint az az oldal, amelyre merőleges. Mekkorák a háromszög szögei?

5. Egy tizenkilenc oldalú konvex sokszög minden szögének fokokban mért mérőszáma osztható 10-zel. Igazoljuk, hogy a sokszögnek van két párhuzamos oldala!

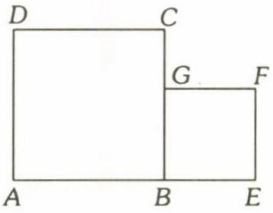
8. osztály, I. kategória

1. Két város közötti úton ugyanabban az időben indul egymással szembe két autó. Az indulás időpontjától számított 2 óra 40 perc múlva a köztük lévő távolság 60 km, és az egyik autó az út 7/10 részét, míg a másik a 3/5 részét tette meg. Számítsuk ki a két város közötti távolságot és az autók sebességét!

2. Szerkesszünk kört egy szabályos háromszög magassága, mint átmérő fölé. Igazoljuk, hogy a háromszög két oldalának a negyede a körön kívül van!

3. Öt különböző egész számra gondoltam. Ha páronként összeadom őket, akkor a 0, 2, 4, 4, 6, 8, 9, 11, 13, 15 összegeket kapom.
Melyek ezek az egészek?

4. Az *ABCD* és a *BEFG* négyzeteket az ábrán látható módon helyeztük egymás mellé.
Bizonyítsd be, hogy az *AB*, a *BE*, az *FC* és a *GD* szakaszok felezőpontjai is egy négyzet csúcsai!



5. Egy 10 × 10-es négyzet alakú tábla mezőire ráírjuk az első 100 pozitív egész számot úgy, hogy az első sorba 1-től 10-ig, majd a másodikba 11-től 20-ig és így tovább. Az utolsó sorba 91-től 100-ig, növekvő sorrendben.
Bizonyítsd be, hogy bármely 7 × 7-es részbe írt számok összege mindig osztható 49-cel!

8. osztály, II. kategória

1. Ha Gabi fiú, akkor fiatalabb, mint Feri. Ha Gabi 13 éves, akkor Gabi lány. Ha Gabi nem 13 éves, akkor Gabi legalább olyan idős, mint Feri. Fiú vagy lány Gabi?

2. Legyen *P* az *ABC* szabályos háromszög tetszőleges belső pontja. *P*-ből az oldalakra bocsátott merőlegesek talppontjai rendre *D*, *E* és *F*. Igazoljuk, hogy a $\frac{PD+PE+PF}{BC+AB+AC}$ tört értéke nem függ *P* megválasztásától!

3. Jelöljünk ki a síkbeli koordináta-rendszerben 5 olyan pontot, amelyeknek mindkét koordinátája egész szám (rácspontok)! Bizonyítsuk be, hogy az ezeket összekötő szakaszok között mindig van olyan, amelyik a belsejében rácspontot tartalmaz!

4. Egy 5 × 5-ös négyzet alakú táblázat minden mezőjébe az 1 vagy −1 számot írjuk. Minden oszlop alá odaírjuk az oszlopban szereplő számok szorzatát, és ugyanígy a sorok mellé a sorban szereplő számok szorzatát. Mennyi az így nyert tíz szám szorzata? Igazold, hogy a tíz szám összege nem nulla!

5. Egy konvex tízszög összes átlóját meghúztuk. Legfeljebb hány metszéspontjuk lehet a tízszög belsejében?

Tehetségkutató verseny

8. osztályosok számára a Berzsenyi Dániel Gimnáziumban (Budapest, 1995. január 6.)

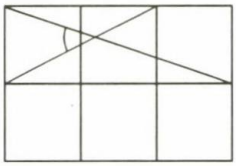
1. Két, egymástól 32 km-re lévő városból egyszerre, egymással szembe indul két kerékpáros. Indulásuk után 1/2 órával a köztük lévő távolság 14 km. Ekkor a lassúbb 1/4 órát pihen, majd változatlan sebességgel folytatja útját, így a közös indulásuktól számítva 1 óra múlva találkoznak. Mekkora volt a sebességük?

2. Igazoljuk, hogy van olyan csupa 1 és 0 számjegyekből álló (tízes számrendszerbeli) szám, mely osztható 26-tal!

3. $ABCD$ négyzet, oldala 2 egység. E pont az AB, F pont a BC oldalon van és $AE = BF = 1$ egység. DE egyenes az I, a DB egyenes a H pontban metszi az AF egyenest. Mekkora a $BEIH$ négyszög területe?

4. Határozzuk meg az $\overline{ab}$ számot, ha tudjuk, hogy számjegyei négyzetének összege prím, számjegyei négyzetének szorzata 100-zal osztható!

5. Mekkora a jelzett szög az alábbi ábrán?



6. Egy dobozban összesen 104 db kék és piros golyó van. Kiveszünk valamennyit, és ebben tízszer annyi a piros, mint a kék. A dobozban maradtak között hatszor annyi a kék, mint a piros. Hány piros volt eredetileg a dobozban?

Pappné Ádám Györgyi

Tanítóképző Főiskolák Országos Matematikaversenye

1994. november 11-12-én – 1991 óta harmadik alkalommal – rendeztük meg a Tanítóképző Főiskolák Országos Matematikaversenyét. Az előző évekhez hasonlóan idén is a békéscsabai Kőrösi Csoma Sándor Főiskola volt a verseny házigazdája. A feladatok kitűzésére és a zsűri elnöki tisztének ellátására dr. Szendrei János nyugalmazott főiskolai tanárt kértük fel. A szeptemberben közreadott felhívásra 12 intézmény 49 hallgatója jelentkezett és mérte össze tudását november 11-én. Minden főiskolát egy négyfős csapat képviselt, és egy matematika szakkollégista hallgató is jelentkezett, akinek a munkáját külön értékeltük.

A végső eredmény:

A csapatverseny helyezettjei:

I. díj Budapesti Tanítóképző Főiskola

II. díj Apáczai Csere János Tanítóképző Főiskola, Győr

III. díj Berzsenyi Dániel Tanárképző Főiskola Tanítóképző Intézete, Szombathely.

Az egyéni verseny helyezettjei:

I. díj Prechoda Györgyi, Budapest
Kádár László, Budapest
Bolla Katalin, Szombathely

II. díj Schön Brigitta, Baja

III. díj Tölgyes Tímea, Győr
Kilián Szilvia, Békéscsaba
Mantlik Péter, Zsámbék.

A versenyre a zsűri elnöke az alábbi 8 feladatot tűzte ki.

1. Legyenek adottak az alábbi halmazok:

$$A = \left\{ a \mid a \in \mathbb{N}, \frac{17}{11} < \frac{15+a}{13} \right\},$$

$$B = \left\{ b \mid b \in \mathbb{N}, \frac{11}{17} \leq \frac{5}{1{,}\overline{72}+2b} \right\}.$$

Melyek az elemei az $A \cap B$, $A \cup B$, $B \setminus A$, $(A \setminus B) \cap (A \cup B)$ halmazoknak?

2. Legyen $\overline{ababab}$ tízes alapú számrendszerben felírt természetes szám, ahol a, b a 0, 1, 2, ..., 9 bármelyike lehet. $(a \neq b)$
Melyik az a legnagyobb prímszám, amelyik ezek valamelyikének osztója?

3. A következő növekvő sorozat tartalmazza a 3 hatványait és ezek összes lehetséges összegét, de egy összegben ugyanaz a hatvány csak egyszer szerepel összeadandóként:

1, 3, 4, 9, 10, 12, 13, 27, ...

Mi a 100. tagja a sorozatnak?

4. Mely természetes számra nem igaz az alábbi állítások egyike sem:

a) a keresett szám nagyobb 500-nál,

b) az előtte lévő szám nem osztható 8-cal,

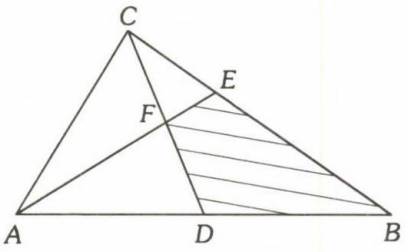
c) a rákövetkező természetes szám nem osztható 3-mal,

d) a számot 7-tel osztva 3-nál kisebb maradékot kapunk,

e) a számot 5-tel osztva 3-nál nagyobb lesz a maradék,

f) az előbbi két maradék különböző.

5. Az ABC háromszög területe 36 cm^2. Legyen D az AB oldal felezőpontja, E pedig a BC oldalnak a C-hez közelebb eső harmadolópontja! Az AE és a CD metszéspontja legyen F!
Számítsuk ki a $BDFE$ négyszög területét!



6. Igazoljuk, hogy van olyan pozitív valós szám, amelynél az

$$f(x) = x(x+1)(x+2) \ldots (x+1994)$$

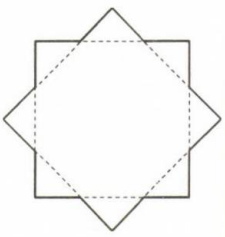
függvény az 1 értéket veszi fel!

7. A négyjegyű természetes számok mindegyikét azonos nagyságú gömbökbe helyezve, egy dobozba tesszük.
Mi a valószínűsége annak, hogy olyan számot húzunk ki, amelyiknek a jegyei különbözőek, és pontosan két jegye páros, de nem 0-ra végződik?

8. Az ábrán látható síkidomot úgy kapjuk, hogy egy négyzetre ráhelyezzük annak 45°-os, középpont körüli elforgatottját.

a) Mekkora az így előállt 16 oldalú sokszög területe?

b) Hogyan darabolható át ez a sokszög egy vele egyenlő területű négyzetté?



Matematika feladatmegoldó pontverseny

IV. forduló

Kitűzött feladatok 11-12 éveseknek (5-6. osztály)

95.9. Jelöljön A, B, C és D négy egymást követő számjegyet, $\overline{ABCD}$ pedig az ezekkel felírt, tízes számrendszerbeli négyjegyű számot.
Tudjuk, hogy

$$\begin{array}{r} \overline{ABCD} + \\ \overline{DCBA} \\ \cdots\cdots \\ \hline 12300 \end{array}$$

ahol a pontok helyén egy olyan négyjegyű szám áll, amelynek számjegyei szintén A, B, C és D valamilyen sorrendben. Melyek lehetnek az A, B, C és D számjegyek?

95.10. Egy kocka lapjait 3 színnel (pirossal, kékkel és zölddel) akarjuk kiszínezni úgy, hogy mind a 3 színt felhasználjuk. Hányféleképpen lehetséges ez, ha két kiszínezést nem tekintünk különbözőnek, ha egyik a másikból elforgatással származtatható?

95.11. Két kerékpáros az A pontból egyszerre indul el a B felé. Amikor a gyorsabb B-be ér, azonnal visszafordul és B-től 10 km-re találkozik a lassabban haladóval. Ezután mindkettő folytatja útját. Amikor a lassabb B-be ér szintén azonnal visszafordul. A gyorsabb, miután visszaért A-ba, újra azonnal visszafordul és az AB távolság 1/3-ának megtétele után újra találkoznak. Mindkét kerékpáros sebessége állandó. Mekkora az AB távolság?

95.12. Egy négyzet mindegyik oldalán kijelölünk 3-3 pontot (a csúcsoknál különböző pontokat). Hány olyan háromszög van, amelynek csúcsai a megjelölt 12 pont közül kerülnek ki?

Kitűzött feladatok 13-14 éveseknek (7-8. osztály)

95.13. Egy adott körbe és a kör köré is szabályos hatszöget szerkesztünk. Mekkora a két hatszög területének aránya?

95.14. Ha egy adott négyjegyű számot megszorzunk azzal a számmal, amit úgy kapunk az adott számból, hogy jegyeit fordított sorrendbe írjuk, akkor a kapott szorzat 8 jegyű és utolsó három jegye 0. Mi lehet az adott négyjegyű szám?

95.15. Egy sakkversenyen 2 hetedik osztályos indult, a többi induló nyolcadikos volt. A versenyen a 2 hetedikes együtt 8 pontot szerzett, a nyolcadikosok csupa azonos pontszámot gyűjtöttek. A versenyen mindenki mindenkivel egyszer játszott. Hányan lehettek a nyolcadikos versenyzők?

95.16. Mutassuk meg, hogy egy olyan egyenlő szárú háromszöget, amelynek egyik szöge 120°, fel lehet darabolni 5 hozzá hasonló (ugyancsak 120°-os, egyenlő szárú) háromszögre!

* * *

A versenyfelhívás A matematika tanítása 1994. évi 4. számában olvasható.

A megoldásokat a következő címre kérjük küldeni:

Mozaik Oktatási Stúdió
6701 Szeged Pf. 301.

A borítékra kérjük írják rá: *Matematika feladatmegoldó pontverseny*. A beküldési határidő: *1995. április 30.*

Az 1994/95. tanévi matematika feladatmegoldó pontverseny II. fordulójában kitűzött feladatok megoldása

A feladatok szövege az 1994/5. szám 17-18. oldalán olvasható.

94.25. Jelölje A, B és C Andris, Béla és Csaba forintjainak számát! Tudjuk, hogy

$$A + B + C = 40$$

és

$$A + 481B = 999C.$$

Adjuk hozzá a második egyenlőség mindkét oldalához C-t, akkor a kapott egyenlőség így írható:

$$A + B + C + 480B = 1000C.$$

Az első egyenlőséget felhasználva

$$40 + 480B = 1000C,$$

itt mindkét oldalt 40-nel eloszthatjuk:

$$1 + 12B = 25C.$$

Itt B és C pozitív egészek, egy megoldás azonnal adódik: $B = 2$, $C = 1$ és így $A = 37$. Ha tovább számolunk, akkor $B = 27$ és $C = 13$ jöhetne még szóba, de akkor $A = 0$ lenne, ami nem lehet.

Így Andrásnak 37, Bélának 2 és Csabának 1 forintja van.

94.26. A feladat két lehetséges megoldása például a következő:

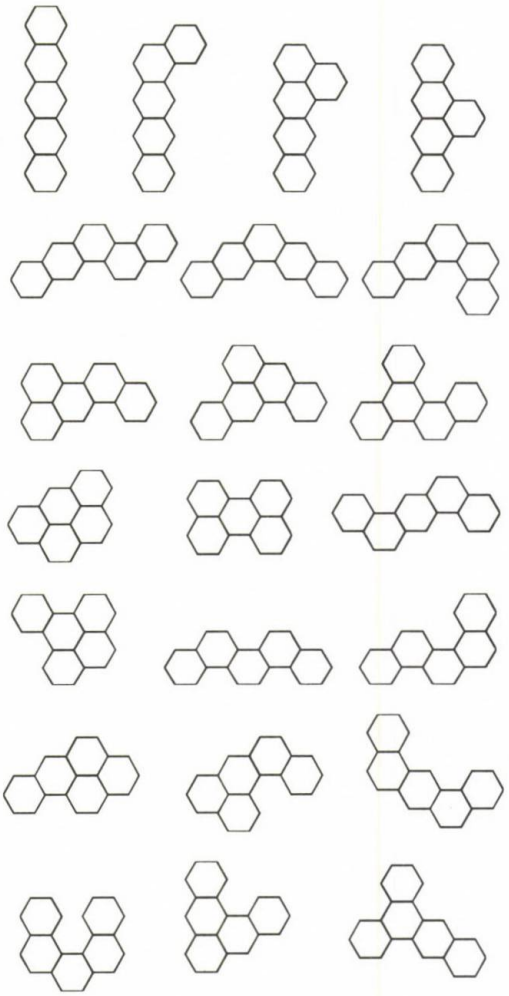
$$2469135780 : 2 = 1234567890$$

és

$$9876543210 : 2 = 4938271605.$$

94.27. Az egybevágó szabályos hatszögekből 7 különböző tetraminó készíthető:

Komolyabb feladatot jelent a 22 különböző pentaminó előállítása:

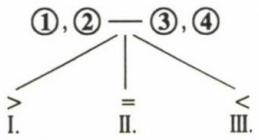


94.28. Könnyen adódik, hogy 5 méréssel ki tudjuk választani a hamis érméket. Például 5 méréssel az ① érmét összehasonlítjuk a többivel. A könnyebbek a hamis érmék.

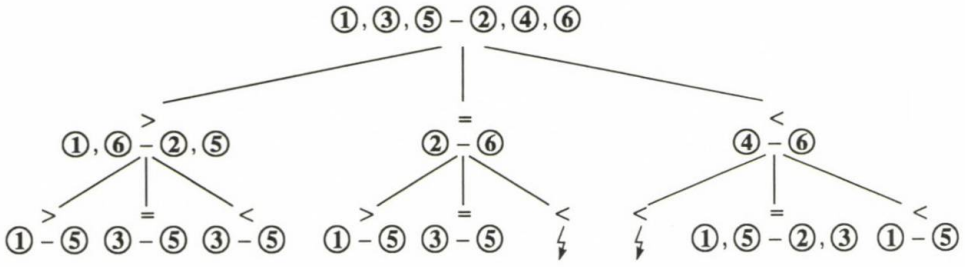
A kiválasztást 4 méréssel is megoldhatjuk például a következő módon. Először az ①, ② és a ③, ④ jelű érméket hasonlítjuk össze a mérlegen. Ekkor három eset lehetséges.

I. ①, ② nehezebb, mint ③, ④;
II. ①, ② súlya egyenlő ③, ④ súlyával;
III. ①, ② könnyebb, mint ③, ④.

Ezt röviden így jelölhetjük:



Nézzük először az I. esetet! A következő, második méréssel az ①, ③, ⑤ és ②, ④, ⑥ jelű érméket hasonlítjuk össze. A három lehetséges esetet, majd a folytatást a következő ábrán jelöltük röviden:



Balról jobbra haladva az egyes ágakat sorra könnyű végigkövetni. Ahol az egyes ág végén ↯ jelet találunk, az lehetetlen.

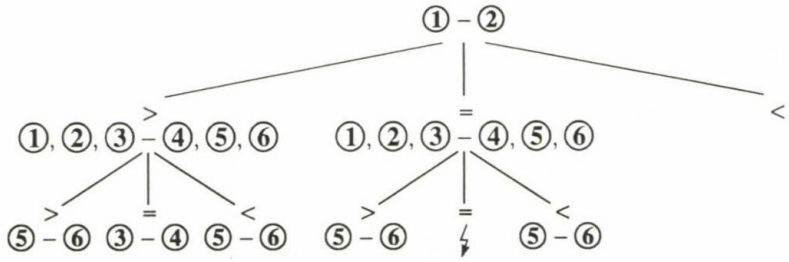
Ha például az első esetben azt találjuk a negyedik méréskor, hogy ① > ⑤, akkor ① jó, ⑤ hamis. Ebben az esetben csak az lehet, hogy ②, ③, ④, ⑥ is hamis.

Ha az első ágon a negyedik méréskor ① = ⑤ adódik, akkor a harmadik mérés alapján ⑥ jó, ② hamis, amiből következik, hogy ①, ⑤ jó, ③, ④ hamis.

Az ① < ⑤ lehetőség itt nem fordulhat elő, ellentmondásra vezet.

Hasonló módon tárgyalható a többi eset is.

A II. eset folytatásának csak a vázlatát adjuk meg:



A jobb oldali ág folytatása a bal oldali ághoz hasonlóan megtehető.

A III. eset teljesen hasonló az I. esethez.

Végiggondolható, hogy 4-nél kevesebb mérés általában nem elég a hamis érmék különválasztásához.

94.29. Érdemes észrevenni, hogy az egyes érmék ára sorra az 5 hatványaival egyenlő:

$5,\ 25 = 5^2,\ 125 = 5^3,\ 625 = 5^4,\ 3125 = 5^5.$

Ez adja az ötletet, hogy írjuk fel a fizetett végösszeget 5-ös számrendszerben:

$$9615 = 3 \cdot 5^5 + 0 \cdot 5^4 + 1 \cdot 5^3 + 4 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 + 0.$$

Mivel ez az előállítás egyértelmű, egyértelmű a következő átalakítása is:

$$9615 = 2 \cdot 5^5 + 5 \cdot 5^4 + 1 \cdot 5^3 + 4 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5.$$

Innen leolvasható, hogy András 125, Béla 3125, Csaba 5, Dénes 25 és Endre 625 forintért vásárolta az érmet.

94.30. Színezzük ki a 10×10-es sakktáblát 6 színnel úgy, hogy ha bárhova is teszünk egy 1×6-os „dominót", az mindig 6 különböző színű mezőt fedjen! A színeket például az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számokkal jelölhetjük

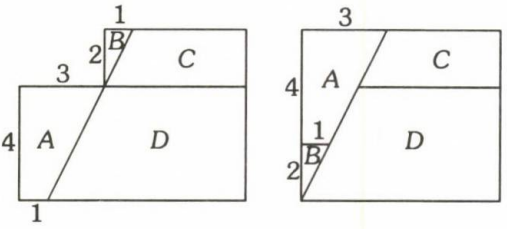
és egy „jó" színezést kapunk, ha a bal alsó sarokba 1-et írunk, majd a sorra következő balról jobbra, lefelé vezető átlós sorokba mindig 1-gyel nagyobb számokat írunk, egészen a hatodik átlós sorig, majd újra 1-gyel folytatjuk, és így tovább.

A kiszínezett táblán összeszámolva azt találjuk, hogy az 1, 2 és 6 jelű mezőkből 16 van, 3 és 5 jelűből 17, 4 jelűből 18.

Ha most a 4 sarokmezőt nézzük, ezeken a helyeken két 1 és két 4 jelű mező van, tehát ezeket kivágva, a maradék táblán nem egyenlő a különböző színű mezők száma. Ebből következik az állítás, hiszen ha a „csonka" tábla lefedhető lenne 16 darab 1×6-os „dominóval", akkor egyenlő lenne rajta a 6 különböző színű mezők száma.

Érdekes megfigyelni azt, ha a 10×10-es sakktábláról a 4 középső mezőt vágjuk ki, akkor az így kapott „lyukas" tábla lefedhető 16 darab 1×6-os „dominóval".

94.31. Egy lehetséges átdarabolást mutat a következő két ábra:



94.32. Ha az A szám utolsó (az egyesek helyén álló) számjegye b, akkor A így írható fel:

$$A = 10X + b,$$

ahol X egy pozitív egész szám.

A B számot így kapjuk: $B = X + 2b$. Mivel $10B = 10X + 20b = 10X + b + 19b = A + 19b$, ha 19 osztója A-nak, akkor osztója $10B$-nek is és így B-nek is, hiszen 19 és 10 relatív prímek. Ha 19 osztója B-nek, akkor $10B$-nek is, így $10B - 19b = A$-nak is.

Feladatrovat tanároknak

Rovatvezető: **Pogáts Ferenc**

A megoldásokat kérjük a rovatvezető címére küldeni: **1052 Budapest, Petőfi Sándor u. 10. II. 10**. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljük. Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak a megoldásait is) külön lapra írjuk tollal vagy írógéppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsuk össze, és külső felére írjuk rá a feladat számát és a megoldó nevét! Csatoljunk a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat a kitűzést követő negyedik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük. **Beküldési határidő:** *1995. április 30.*

37. Létezik-e két olyan hétjegyű szám, amelyek mindegyikében az első hét pozitív egész számjegyként szerepel és egyikük a másiknak többszöröse?

Math. Challenge 1977-78

38. Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok olyan x, y és z valós szám létezik, amelyekre az

$$a = x + y + z, \quad b = xy + yz + xz, \quad c = xyz$$

számok közül valamelyik kettő racionális, a harmadik pedig irracionális!

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

39. Számítsa ki az S_{1995} értékét ezred pontossággal, ha

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)} \; !$$

Kocsis Orsolya, Szolnok

40. Egy szabályos kilencszög minden csúcsát pirosra vagy zöldre színeztük. Bármely 3 csúcs egy háromszöget határoz meg. Egy ilyen háromszöget aszerint nevezünk pirosnak vagy zöldnek, hogy csúcsai mind pirosak, vagy mind zöldek. Bizonyítsuk be, hogy a kilenc-

szög bármely, említett színezése mellett van legalább két különböző, de egybevágó azonos színű háromszög!

Ambrus Gabriella, Budapest

41. Adott a $0 < \alpha < \pi$ szög, és egy $0 < d$ állandó. Mi a sík azon P pontjainak mértani helye, amelyeknek az α szög száraitól való távolságának az összege d?

Szeredi Éva, Budapest

42. Egy szegény legény 99 zsák aranyból választhat magának akármennyit, de csak akkor kapja meg ezeket, ha mérlegre téve, a kiválasztottak összsúlya egész szám. A mérleg csak egész kilogrammokat mutat, és az egy dekagrammos eltérést már nem észleli. A zsákok egyenlő súlyúak és a legény egyiket mérlegre téve látta, hogy ezt még nem viheti haza. Gazdagon távozott-e a legény?

Tóth Sándor, Sárospatak

Feladatmegoldások (19-24. feladatok)

19. Legyen T olyan nemnegatív valós számoknak a halmaza, amelyeknek a 4-es számrendszerbeli alakjában csak a 0 és az 1 számjegyek találhatók. Bizonyítsuk be, ha $x \in T$ és $y \in T$, de $x \neq y$, akkor

$$\frac{1}{2}(x+y) \notin T!$$

Megoldás: Az állítással ellentétben tegyük fel, hogy van olyan x és y, melyekre $x \in T$, $y \in T$ és $\frac{1}{2}(x+y) \in T$, $x \neq y$! Ez azt jelenti, hogy az így nyert $x+y$ szám 4-es számrendszerbeli alakja csupán a 0 és/vagy a 2 jegyekből áll, ennélfogva az x és az y azonos helyi értékű jegyei – amelyek csak a 0 vagy az 1 lehetnek – mind megegyeznek, vagyis $x = y$, ami ellentmond feltevésünknek.

András Szilárd, Csíkszereda
Blázsik Zoltán, Szeged

A megoldók száma: 10.

20. Adott 6 nem egysíkú pont. Tekintsük valamennyi, páronként közös végpont nélküli három szakasz felezőpontja adta háromszög súlypontját. Igazoljuk, hogy e súlypontok azonosak!

Bencze Mihály, Brassó

Megoldás: A tér tetszőleges pontjából mutassanak az adott pontokba az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_6$ vektorok! A páronként közös végpont nélküli szakaszok felezőpontjainak helyvektorai

$$\frac{\mathbf{a}_{i1}+\mathbf{a}_{i2}}{2}, \quad \frac{\mathbf{a}_{i3}+\mathbf{a}_{i4}}{2}, \quad \frac{\mathbf{a}_{i5}+\mathbf{a}_{i6}}{2},$$

ahol $i_1, i_2, \ldots, i_6$ az 1, 2, ..., 6 számok egy permutációja.

Az így kapott háromszög súlypontjába mutató vektor

$$\frac{\frac{\mathbf{a}_{i1}+\mathbf{a}_{i2}}{2}+\frac{\mathbf{a}_{i3}+\mathbf{a}_{i4}}{2}+\frac{\mathbf{a}_{i5}+\mathbf{a}_{i6}}{2}}{3} = \frac{\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3+\mathbf{a}_4+\mathbf{a}_5+\mathbf{a}_6}{6}.$$

Ez azt jelenti, hogy valamennyi, a feltételeknek megfelelő (esetleg elfajuló) háromszög súlypontja azonos. A hat adott pont egysíkú voltát nem használtuk ki; a felezőpontok adta háromszög lehet elfajuló is, melyre példát a szabályos oktaéder átellenes csúcspárjai adnak.

Csete Lajos, Markotabödöge
Csorba Ferenc, Győr

A megoldók száma: 10.

21. Határozzuk meg azokat a pozitív egész n számokat, amelyekre az

$$\frac{1}{n(n+1)} - \frac{3}{n(n+1)(n+2)} + \frac{n}{(n+1)(n+2)}$$

vegyes szakaszos tizedestört!

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

Megoldás: Az adott kifejezést közös nevezőre hozva, az

$$(*) \quad \frac{n^2+n-1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

adódik. Bebizonyítjuk, hogy bármely pozitív egész n-re e tört vegyes szakaszos tizedes tört.

Ennek bizonyítására felhasználjuk az ismert tételt: az $\frac{a}{b}$ racionális szám $(0 < \frac{a}{b} < 1, (a, b) = 1)$ akkor és csak akkor írható fel vegyes szakaszos tizedes tört alakban, ha $(b, 10) \neq 1$. (Lásd pl. *dr. Szendrei János: Algebra és számelmélet, Tankönyvkiadó, Budapest, 177. oldal.*)

A (*) jobb oldalán álló kifejezésből kiolvasható, hogy 1-nél kisebb pozitív racionális számmal van dolgunk. A (*) bal oldalán álló tört redukált tört, azaz számlálójának és nevezőjének nincs 1-nél nagyobb közös osztója, mivel $n^2 + n - 1 = n(n+1) - 1$ miatt a számláló és a nevező közös prím osztója csakis az $n+2$ és az $n^2 + n - 1$ közös osztója lehet. Ha volna ilyen közös prímosztó, akkor az osztaná ezek összegét az $n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$-t is, tehát az $n+1$-et is. Ám az $n+2$ és az $n+1$ szomszédos egészeknek nincs közös prímosztója. A (*) nevezője páros szám és 3-nak is többszöröse, ezért az idézett tétel szerint a (8) mindig vegyes szakaszos tizedes tört, sőt sohasem véges tizedes törtből való.

Ambrus Gabriella, Budapest
Horváth Géza, Zselíz

A megoldók szzáma: 9.

22. Legyen a_0 pozitív egész és

$$a_n = a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-1}} \quad (n \geq 1).$$

Az a_n sorozat tagjai között van-e egész szám? Adjunk meg olyan $n \mapsto f(n)$ függvényt, amely az a_n-től különbözik és aszimptotikusan egyenlő az a_n -nel, azaz

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{f(n)} = 1.$$

Blázsik Zoltán, Szeged

Megoldás: Teljes indukcióval azonnal belátható, hogy az a_n racionális szám, továbbá az $a_0 > 0$ miatt $a_n > 0$ minden n-re és ennélfogva az $a_n - a_{n-1} = \frac{1}{a_{n-1}} > 0$, tehát a sorozat szigorúan növekvő.

Ismert, hogy $x > 0$-ra $x + \frac{1}{x} \geq 2$ és az egyenlőség is csak $x = 1$-re, azaz esetünkben $a_0 = 1$-re áll fenn. Ha tehát a_n az $n \geq 1$-re egész, úgy $a_n \geq 2$ miatt van olyan $k \geq 0$ egész, hogy $a_n = 2 + k$, és így a $2 + k = a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-1}}$ miatt az ebből nyert másodfokú egyenlet diszkriminánsa $k^2 + 4k$. Az a_{n-1} csak akkor racionális, ha az egyenlet diszkriminánsa négyzetszám. Mivel $k \geq 1$-re $(k+1)^2 < k^2 + 4k < (k+2)^2$, ezért a_n pontosan akkor egész, ha $k = 0$, vagyis $a_{n-1} = 1$, tehát $n = 1$. Ezzel beláttuk, hogy a sorozat tagjai között egyetlen esetben található $n \geq 1$-re egész szám: ha $a_n = 1$ és ekkor az $a_1 = 2$ a sorozat egyetlen, a_0-tól különböző, egész tagja.

Mivel $a_k = a_{k-1} + \frac{1}{a_{k-1}}$, ezért $a_k^2 = a_{k-1}^2 + \frac{1}{a_{k-1}^2} + 2$, következésképpen

$$a_n^2 = 2n + a_0^2 + \frac{1}{a_0^2} + \frac{1}{a_1^2} + \ldots + \frac{1}{a_{n-1}^2},$$

és

$$a_n = \sqrt{2n + a_0^2 + \frac{1}{a_0^2} + \frac{1}{a_1^2} + \ldots + \frac{1}{a_{n-1}^2}}.$$

A

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\sqrt{2n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{a_0^2 + \frac{1}{a_0^2} + \frac{1}{a_1^2} + \ldots + \frac{1}{a_{n-1}^2}}{n}} = 1,$$

hiszen *Stolz* tételével (Lásd: B.P. Gyemidovics: Matematikai analízis. Feladatgyűjtemény, Tankönyvkiadó, Budapest, 1971., 143. feladat, 23. oldal.)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_0^2 + \frac{1}{a_0^2} + \frac{1}{a_1^2} + \ldots + \frac{1}{a_{n-1}^2}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{a_n^2}}{(n+1) - n} = 0,$$

mivel

$$a_n^2 > 2n + 1 \text{ miatt } \frac{1}{a_n^2} \to 0.$$

Ezzel beláttuk, hogy az $n \mapsto \sqrt{2n}$ $(\neq a_n)$ aszimptotikusan egyenlő az a_n-nel.

Csete Lajos, Markotabödöge
Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

Megjegyzés: Nem nehéz azt sem belátni, ha α_n és β_n olyan valós számsorozatok, amelyekre $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 1$ és β_n pozitív állandó, vagy $\lim \beta_n = +\infty$, úgy az $f(n) = \alpha_n a_n + \frac{1}{\beta_n}$ kívánt tulajdonságú függvényt ad.

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

A megoldók száma: 7.

23. Igazoljuk, hogy bármely t területű, $2s = a + b + c$ kerületű háromszögben fennáll a

$$\frac{8st}{9} \geq \frac{abc}{\sqrt{3}}$$

reláció!

Fekete Szilárd, Brassó

Megoldás: Valamennyi megoldónk észlelte, hogy a közölt reláció fordítottan áll, azaz

$$\frac{8st}{9} \leq \frac{abc}{\sqrt{3}}.$$

Reiman István: A geometria és határterületei (Gondolat Kiadó, Budapest, 1986., 234. és 235. oldal) c. könyvben található $a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2$ (R a körülírt kör sugara) alapján, felhasználva az $\frac{abc}{4t} = R$ összefüggést is, a számtani és a négyzetes közepek közötti reláció miatt

$$\frac{2s}{3} = \frac{a+b+c}{3} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} \leq$$

$$\leq \sqrt{\frac{9R^2}{3}} = \sqrt{3}R = \frac{abc\sqrt{3}}{4t},$$

amiből adódik állításunk. Az egyenlőség csak akkor áll, ha $a = b = c$.

Megjegyzés: A kitűzött feladat az alábbi egyenlőtlenséglánc egyik szeme:

$$\sqrt{a^4+b^4+c^4} \geq \frac{a^2+b^2+c^2}{\sqrt{3}} \geq \frac{(a+b+c)^2}{3\sqrt{3}} \geq$$

$$\geq \sqrt{3}\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \geq \sqrt{abc(a+b+c)} \geq \frac{9abc}{\sqrt{3}(a+b+c)} \geq$$

$$\geq \frac{3abc}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \geq 4t,$$

ahol az egyenlőség mindenütt csakis $a = b = c$ esetben áll fenn.

Ezek igazolása a négyzetes, a számtani, a mértani és a harmonikus közepekre ismert relációk ismételt alkalmazásával történik.

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

A megoldók száma: 12.

24. A tér egy P pontjára n darab olyan egyenes illeszkedik, amelyek közül bármelyik kettő hajlásszöge legalább 30°. Mutassuk meg, hogy $n < 59$!

Bundeswettbewerb, 1985.

Megoldás: Tekintsük azokat a forgáskúpokat, amelyek forgástengelyei rendre az adott egyenesek, és nyílásszögük 30°. A feltételek szerint e kúpok semelyik kettőjének sincs közös belső pontja. Legyen G a P középpontú egységgömb. Kúpjaink a G felületét páronként közös belső pont nélküli gömbsüvegben metszik. Egy-egy ilyen gömbsüveg felszíne $2\pi(1-\cos 15°)$, míg a gömb felszíne 4π. A $\frac{4\pi}{2\pi(1-\cos 15°)}$ hányadosnál több gömbsüveg nem fér el a gömbfelületen. Mivel a $\frac{2}{1-\cos 15°} \sim 58{,}69 < 59$, ezért legfeljebb 58 darab P kezdőpontú félegyenes van, amelyek páronkénti szöge legalább 30°. Ha a P-re illeszkedő egyenesek számára keresünk felső korlátot, akkor már 30 egyenest sem lehet a P-re illeszteni úgy, hogy páronkénti hajlásszögük legalább 30°-os legyen.

András Szilárd, Csíkszereda
Csorba Ferenc, Győr

A megoldók száma: 5.

A megoldók névsora: Ambrus Gabriella, Budapest (19-21., 23.); András Szilárd Károly, Csíkszereda (19-22.,23. 2 mód, 24.); Barta László, Benczúrfalva (19., 20., 23., 24.); Bíró Bálint, Eger (19-21., 23.); Blázsik Zoltán, Szeged (19., 22., 23.); Csete Lajos, Markotabödöge (20-22., 23. 3 mód, 24.); Csorba Ferenc, Győr (19-24.); Horváth Géza, Zselíz (19-21., 23.); Kocsis Orsolya, Szolnok (19-23.); Mészáros József, Galánta (23.); Simon József, Csíkszereda (19-21., 23., 24.); Tóth Sándor, Sárospatak (19. 2 mód, 20-24.); Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely (19., 20. 2 mód, 21., 22. 2 mód, 23. 6 mód).

Könyvajánlat

Katz Sándor

Matematika feladatsorok

A feladatgyűjtemény olyan középiskolai tanulók számára készült, akik az átlagosnál magasabb szinten tanulják a matematikát. A feladatsorok nagyobb része felvételin vagy versenyeken jól használható feladatmegoldási módszereket, ötleteket mutat be. Néhány feladatsor olyan elméleti ismereteket is bemutat, amelyek nem tartoznak szorosan a középiskolai anyaghoz, de az érdeklődő tanulók számára szemléletfejlesztők lehetnek.

Találhatunk benne olyan feladatokat is, melyek egy szakkör vagy tanóra anyagát is képezhetik.

Három fő témakörbe csoportosíthatók a feladatok: trigonometria, logaritmus, másod és magasabbfokú egyenletek

Megjelent ára: 396,- Ft

Ábrahám Gábor

Nevezetes egyenlőtlenségek

A könyv elsősorban a téma szakkörön történő feldolgozásához igyekszik segítséget nyújtani a 17-18 éves diákoknak és az őket tanító tanároknak. Mindazonáltal néhol túllép a szokványos középiskolai tananyag keretein, ezért egy részét már csak speciális matematika tagozaton célszerű felhasználni.

Az összeállítás két nagy fejezetre tagolható: Az első, a témakör elméleti részét foglalja össze úgy, hogy rámutat a különböző egyenlőtlenség típusok szoros kapcsolatára. A második fejezet 79 feladatot és a megoldásaikat foglalja magába.

Megjelik: 1995. április ára: 396,- Ft

Urbán János

Határértékszámítás Példatár

A könyv első kiadása a Műszaki Könyvkiadónál jelent meg a Bolyai Könyvek sorozatban, s régóta hiánycikk.

A példatár kifejezés utal rá, hogy a címben jelzett témát a könyv gyakorlatokon és feladatokon keresztül dolgozza fel, ezen kívül tartalmazza azok részletes megoldásait is. Az első fejezet a valós számok alaptulajdonságait, a teljes indukciót és a sorozatok határértékét tárgyalja. Alkalmazásként szerepel a valós kitevőjű hatvány szabatos definíciója és a végtelen lánctörtek. A második fejezet témája a függvény határértéke és néhány alkalmazása. A harmadik fejezet a differenciálhányados fogalmát és alkalmazását tárgyalja függvényvizsgálat és határértékfeladatok megoldására.

A könyvet matematika tagozatos középiskolai tanulóknak, valamint matematikát hallgató főiskolásoknak, egyetemistáknak, matematika szakos tanároknak ajánljuk.

Megjelent ára: 396,- Ft

imosoft

MOZAIK

A matematika TANÍTÁSA

995. MÁJUS ára: 90,- Ft III. évf. / 3. szám

TARTALOM

EGY MÁSIK SZÍNDOMINÓJÁTÉK: A TRIMINÓ
Dr. Darvasi Gyula
főiskolai docens, Nyíregyháza

A PARABOLA PARABOLÁJA, AVAGY A PARABOLA MINT JELKÉP ÉS PÉLDABESZÉD (ELEMI KÖRKÉP A DINAMIKUS RENDSZEREKRŐL) I.
Benkő József, Pécs - Brassó

A TRIGONOMETRIKUS FÜGGVÉNYEK (SZÖGFÜGGVÉNYEK) ÁLTALÁNOS ALAKJAI
Inczeffy Szabolcs, Ócsa

HÍREK VERSENYEKRŐL

A MATEMATIKA FELADATMEGOLDÓ PONTVERSENY III. FORDULÓJÁNAK MEGOLDÁSA

FELADATROVAT TANÁROKNAK

Egyszerű megállapításnak tűnhet, hogy egy 3×4-es paralelogramma 14 egység kerületű, szimmetrikus alakzat. Felvethető viszont általánosan a kérdés, hogy ezen kívül létezik-e további 14 egység kerületű szimmetrikus alakzat. A válasz: még 17 ilyen alakzat található (7. ábra). *(6. oldal)*

Körültekintő gondossággal az előző elképzelést egy józanabb, a valóságot pontosabban tükröző képpé szelídíthetjük. E célból csupán azt a körülményt kell figyelembe venni, hogy az adott faj egy jól körülhatárolt „élettér" „foglya", s ez csak korlátolt számú (mondjuk N)... *(12. oldal)*

Az ismert trigonometrikus függvényeket az A-ban derékszögű háromszögben a következőképpen írjuk fel: ha $\alpha = 90°$; $\beta, \gamma \neq 0$, és $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, akkor... *(18. oldal)*

MÓDSZERTANI FOLYÓIRAT

A MATEMATIKA TANÍTÁSA
módszertani folyóirat

Szerkesztőség:
Főszerkesztő: Dr. Urbán János
Szerkesztőség címe:
6723 Szeged, Debreceni u. 3.
Tel.: (62) 312-988,
FAX: (62) 328-247

Kiadó:
MOZAIK Oktatási Stúdió Kft.
Felelős kiadó: Török Zoltánné
Műszaki szerkesztő:
Vassné Németh Katalin
Tördelő szerk.: Kovács Attila
Borítóterv: Magyar Csaba

Megrendelhető:
MOZAIK Oktatási Stúdió
6701 Szeged, Pf. 301.
Éves előfizetési díj: 450 Ft

A lap megvásárolható a MOZAIK Könyvesboltokban:
Szeged, Csongrádi sgt. 73.
Budapest VIII., Üllői út 70.

Megjelent a Művelődési és Közoktatási Minisztérium támogatásával.

A matematika tanításában megjelenő valamennyi cikket szerzői jog védi. Másolásuk bármilyen formában kizárólag a kiadó előzetes írásbeli engedélyével történhet.

ISSN 1216-6650

Készült a Dürer Nyomda Kft-ben
Felelős vezető: Székely András

TARTALOM

EGY MÁSIK SZÍNDOMINÓJÁTÉK: A TRIMINÓ
Dr. Darvasi Gyula
főiskolai docens, Nyíregyháza

A PARABOLA PARABOLÁJA, AVAGY A PARABOLA MINT JELKÉP ÉS PÉLDABESZÉD (ELEMI KÖRKÉP A DINAMIKUS RENDSZEREKRŐL) I.
Benkő József, Pécs - Brassó

A TRIGONOMETRIKUS FÜGGVÉNYEK (SZÖGFÜGGVÉNYEK) ÁLTALÁNOS ALAKJAI
Inczeffy Szabolcs, Ócsa

HÍREK VERSENYEKRŐL

A MATEMATIKA FELADATMEGOLDÓ PONTVERSENY III. FORDULÓJÁNAK MEGOLDÁSA

FELADATROVAT TANÁROKNAK

Közlési feltételek:

A közlésre szánt kéziratokat gépelve két példányban vagy floppy lemezen küldjék meg a szerkesztőség címére. A kéziratok lehetőleg ne haladják meg a 6-8 gépelt oldalt (oldalanként 30 sorban 66 leütés).

A rajzokat, ábrákat, táblázatokat és fényképeket külön lapon megfelelő szövegezéssel kérjük ellátni. (A szövegrészben pedig zárójelben utaljunk rá.)

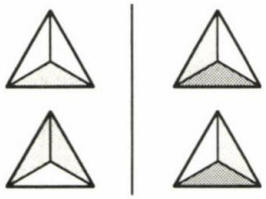
Kérjük, hogy a szövegbeli idézések név és évszám jelöléssel történjenek, míg a tanulmányok végén a felsorolt irodalmak alfabetikus sorrendben készüljenek.

Kérjük szerzőtársainkat, hogy a kéziratok beküldésével egyidejűleg szíveskedjenek közölni pontos címüket, munkahelyüket és beosztásukat, a megjelent cikkek utáni honorárium kifizetése érdekében személyi számukat. A cikk megjelenése után a lemezeket visszaküldjük.

Dr. Darvasi Gyula

Egy másik színdominójáték: a triminó

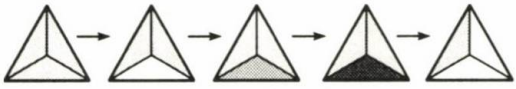
A triminó lapjai fehér kartonból könnyen kivágható, egybevágó és szabályos háromszögek, amelyek egyik oldalán a súlypontot a csúcsokkal összekötő szakaszok megrajzolásával adódó három részháromszög megfelelő kiszínezése után készen is van a játékeszköz. Egy-egy háromszöglap három részháromszögének kiszínezése végezhető egy színnel, illetve pontosan kettő, három, négy vagy még ennél is több különböző színnel. Eközben nem tekintjük különbözőknek azokat a kiszínezett háromszöglapokat, amelyek valamilyen módon (például a lapok súlypontja körüli síkbeli elforgatással) átvihetők egymásba.



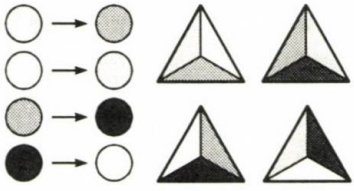
1. ábra

Mindhárom részháromszöget egy és ugyanazon színnel kiszínezve nyilvánvalóan csak egy triminólap adódik. Könnyen ellenőrizhető továbbá, hogy a pontosan kettő illetve pontosan három színnel kiszínezett különböző triminólapok száma egyaránt kettő (1. ábra). Ez az ellenőrzés összetett feladatot jelent: egyrészt minél több különböző triminólap előállítását, másrészt annak indoklását, hogy a megtalált lapokon kívül több már nem létezhet. Ezek a tevékenységi formák elvezetnek ahhoz a tapasztalathoz, hogy a triminó lapjainak előállítása során érdemes valamilyen szisztematikus utat választani. Ehhez egy szempont lehet például a különböző színek egy lapon való elhelyezkedése, valamint azok előfordulási számainak aránya. Több különböző szín esetén a szisztematikus eljárás matematikailag teljesen különböző tevékenységi forma lehet. Az alábbiakban ezek közül ismertetünk néhányat.

1. Valamilyen sorrend követése, azaz rendezés (2. ábra).
2. Minden lehetőséget átfogó, diszjunkt részhalmazok rendszerének előállítása, azaz bizonyos szempontok szerinti osztályozás.
   Például:
   a) egy-, két- vagy háromszínűek: azaz a színek száma szerint,
   b) pirosat nem tartalmazók, a lap egyharmada piros, a lap kétharmada piros, a lap teljesen piros: azaz a színek aránya szerint,
   c) a lapok szimmetriatengelyeinek száma szerint.
3. A már megtalált lapok színeinek permutálása (3. ábra).



2. ábra



3. ábra

Például a négy színnel különbözőképpen kiszínezhető triminólapok osztályozása elvégezhető az alábbi fagráf alapján (4. ábra), ami-

ről egyúttal a négy különböző színnel kiszínezhető összes triminólap száma is leolvasható. Ilyen fagráf természetesen nem csak négy szín esetére készíthető.

A továbbiakban tételezzük fel, hogy n különböző szín áll a rendelkezésünkre, és határozzuk meg a különbözőképpen kiszínezhető triminólapok számát! A számlálást a 2.*a)* pontban leírt szempont szerint végezzük kombinatorikus úton. Kezdjük azokkal a háromszöglapokkal, amelyeknek mindhárom részháromszöge az n különböző szín egyikével van kiszínezve. Nyilvánvalóan n ilyen háromszöglap adódik. Tudjuk továbbá, hogy a pontosan kettő illetve pontosan három színt tartalmazó, különböző lapok száma egyaránt kettő. Most már csak azt kell még tudnunk, hogy n különböző szín közül kettő illetve három szín pontosan $\binom{n}{2}$-, illetve $\binom{n}{3}$-féleképpen választható ki. Így az n különböző színnel kiszínezhető különböző triminólapok $t(n)$ számára a

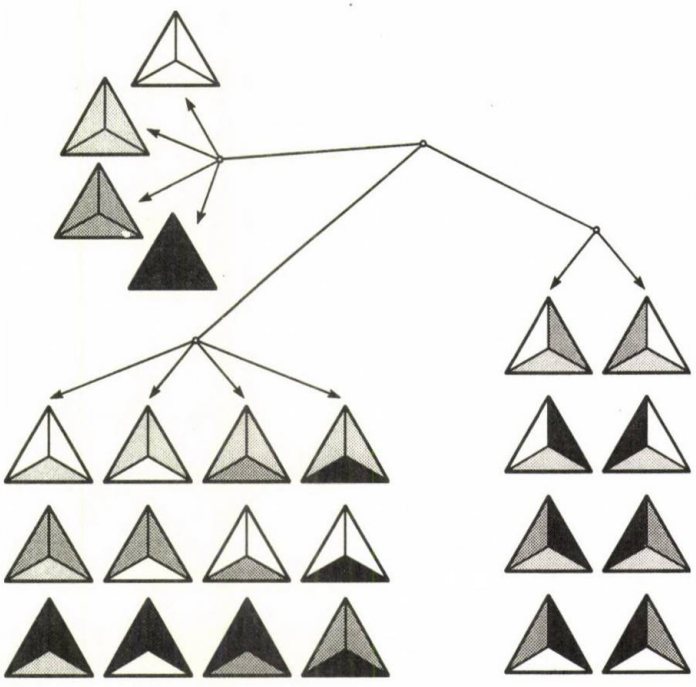
$$t(n) = n + 2 \cdot \binom{n}{2} + 2 \cdot \binom{n}{3} = \frac{n(n^2+2)}{3}$$

összefüggés adódik. Ha ennek alapján az első néhány értéket az alábbi táblázatba foglaljuk, akkor abból azonnal látható, hogy az $n = 1$, $n = 2$ és $n = 3$ esetek a lapok kis száma miatt játék céljából nem érdekesek. Az $n = 4$ eset még jól áttekinthető, viszont az $n \geq 5$ esetek a lapok számának gyors növekedése miatt egyre áttekinthetetlenebbekké válnak, s ezért játék céljára már kevésbé alkalmasak.

n	1	2	3	4	5	6	7	...
$t(n)$	1	4	11	24	45	78	119	...

Folytassuk tehát az $n = 4$ eset részletes leírásával! A 24 triminólap (5. ábra) elkészítését követheti az egyes lapok tulajdonságainak alaposabb megismerése. Ezt a célt szolgálják a 2/a-b-c pont alatti – vagy akár saját magunk által kitalált további – osztályozási szempontok is, miközben ügyelnünk kell arra, hogy minden lap egy és csakis egy osztályban forduljon elő, azaz az osztályozás teljes és egyértelmű legyen. Ezen bevezető gyakorlatok természetesen előfeltételeznek illetve elmélyítenek bizonyos logikai fogalmakat és műveleteket. Ugyanakkor próbára tehetik nemcsak a gyakorlatok elvégzőjét, hanem azok kitűzőjét is. Neki ugyanis úgy kell megadnia a feladatot, hogy az annak elvégzése során a létrejövő osztályozás valóban teljes és egyértelmű legyen. Ebből a célból az osztályozás szempontjainak – vagyis a lapok tulajdonságainak – megjelölésekor a kitűzőnek ismernie kell a választ például az alábbi kérdésekre:

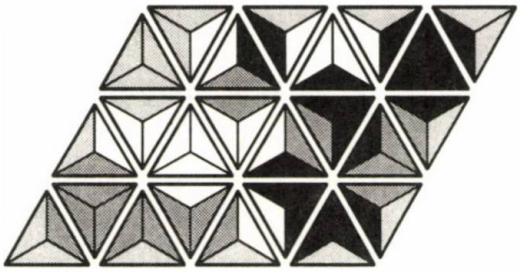
- Mely tulajdonságokból következnek mások?
- Mely tulajdonságnak van meg az a következménye, hogy egy másik vele együtt nem teljesülhet?
- Van-e olyan lap, amely a megadott tulajdonsággal rendelkezik?
- Van-e olyan lap, amely több megadott tulajdonság



4. ábra

esetén azok közül egynél többel is, vagy éppen azok mindegyikével rendelkezik?

– Hogyan adható meg a tulajdonságoknak egy olyan rendszere, amelyből egyértelmű jellemzés adódik? Hány ilyen tulajdonság kell ehhez legalább?



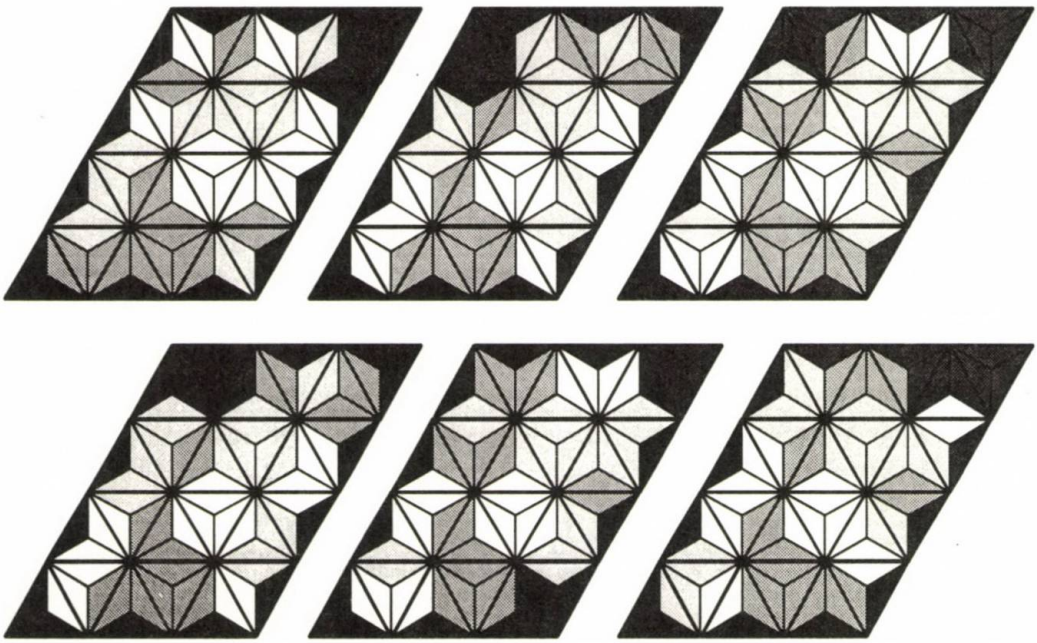
5. ábra

Miután az egyes triminólapok tulajdonságait részletesen megismertük, rátérhetünk összetettebb tevékenységi formákra. Ezek egyike tulajdonképpen már az 5. ábráról is leolvasható, ahol a 24 triminólap úgy helyezkedik el, hogy azok közvetlen egymás mellé tolása révén egy 3×4-es paralelogramma adódik, amelyen belül a szomszédos lapok részháromszögei azonos színnel kapcsolódnak egymáshoz: ez a dominófeltétel. Ugyanezen paralelogramma oldalain a részháromszögek mind azonos színűek: ez a peremfeltétel. Az első játék ennek alapján a következő lehet: a 24 triminólap mindegyikének egyszeri felhasználásával olyan 3×4-es paralelogramma kirakása, amelyre a dominó- és peremfeltétel egyidejűleg teljesül, miközben két paralelogrammát nem tekintünk különbözőnek, ha azok a középpontjuk körüli 180°-os elforgatással egymásba átvihetők.

Néhány kezdeti próbálkozás után egy sor olyan tapasztalatra tehetünk szert, amelyek a továbbiakban a játékot lényegesen felgyorsíthatják. Ilyenek például a következők:

– Egy kész paralelogrammából a színek permutálásával újak kaphatók.

– A peremszín kiválasztása után az összerakás kezdődhet a paralelogramma oldalainak összeállításával, miközben a „befelé mutató" peremszínű részháromszögekkel igen takarékosan kell bánni, mert a 24 triminólap közül csak 13 tartalmazza a választott peremszínt, jóllehet egy 3×4-



6. ábra

es paralelogramma oldalaira összesen 12 ilyen részháromszög kell.

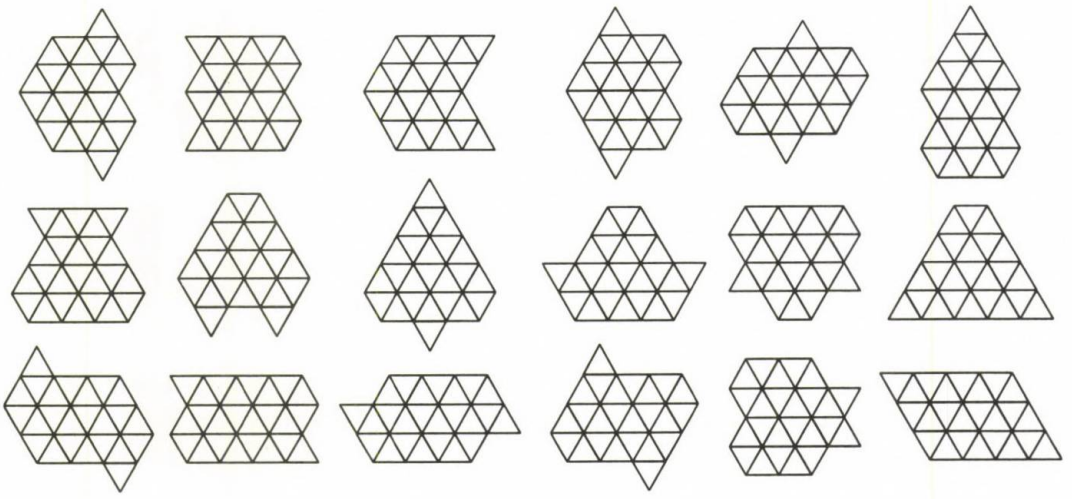
- Egy peremszín kiválasztása esetén az összeállítandó 3×4-es paralelogramma oldalaira a peremszínt tartalmazó lapok hat különböző módon rendezhetők el (6. ábra).
- A peremszínt tartalmazó lapok közül pontosan egy lehet teljesen a 3×4-es paralelogramma belsejében, de ez nem lehet a tisztán peremszínű lap: az mindig a paralelogramma valamelyik csúcsánál van.
- A 3×4-es paralelogramma hegyesszögű csúcsánál csak olyan lap lehet, amely legalább két peremszínű részháromszöget tartalmaz. Összesen négy ilyen lap van, amelyek közül legfeljebb három lehet teljesen a paralelogramma belsejében. A tompaszögű csúcsoknál 1-2-3 peremszínű részháromszöget tartalmazó lap egyaránt lehet.

Itt jegyezzük meg, hogy egy triminólapot valamely kirakott alakzat belsejében illetve szélén lévőnek nevezzük, ha e lapnak legfeljebb egy illetve kettő csúcsa illeszkedik az alakzat határára.

Más típusú paralelogrammaként négy különböző szín esetén csupán a 2×6-os jöhetne szóba, de a dominó- és peremfeltétel együttes megtartása mellett ez nyilvánvalóan nem rakható ki, hiszen 14 peremszínt tartalmazó lap kellene az oldalaira.

Egyszerű megállapításnak tűnhet, hogy egy 3×4-es paralelogramma 14 egység kerületű, szimmetrikus alakzat. Felvethető viszont általánosan a kérdés, hogy ezen kívül létezik-e további 14 egység kerületű szimmetrikus alakzat. A válasz: még 17 ilyen alakzat található (7. ábra).

További problémaként vetődik fel ezek után a 24 triminólap mindegyikének egyszeri felhasználásával, valamint a dominó- és peremfeltétel egyidejű megtartásával kirakható sokszögek lehetséges kerületének általános vizsgálata. Mivel a készletben mindegyik szín pontosan 18 oldalon fordul elő, továbbá a dominó- és peremfeltétel miatt a peremszín egy sokszögben csakis páros számú oldalon van, ezért bármely lehetséges sokszög kerülete csak páros szám lehet. A szóba jöhető értékek: 12, 14, 16 és 18. Viszont a 18 egység kerületű sokszög létezése eleve kizárható, mivel a készletben éppen 18 oldalon van egy adott szín, de a tisztán egyszínű háromszög nem kapcsolódhat mindhárom oldalával egy sokszöghöz. Így tehát 16 egység a lehetséges sokszög kerületének a maximuma. Az ilyen sokszögek között 42 szimmetrikus van (8. ábra). Kérdés még, hogy a kimaradt 12 egység minimális kerületű sokszög lehet-e a szabályos háromszög vagy a szabályos hat-

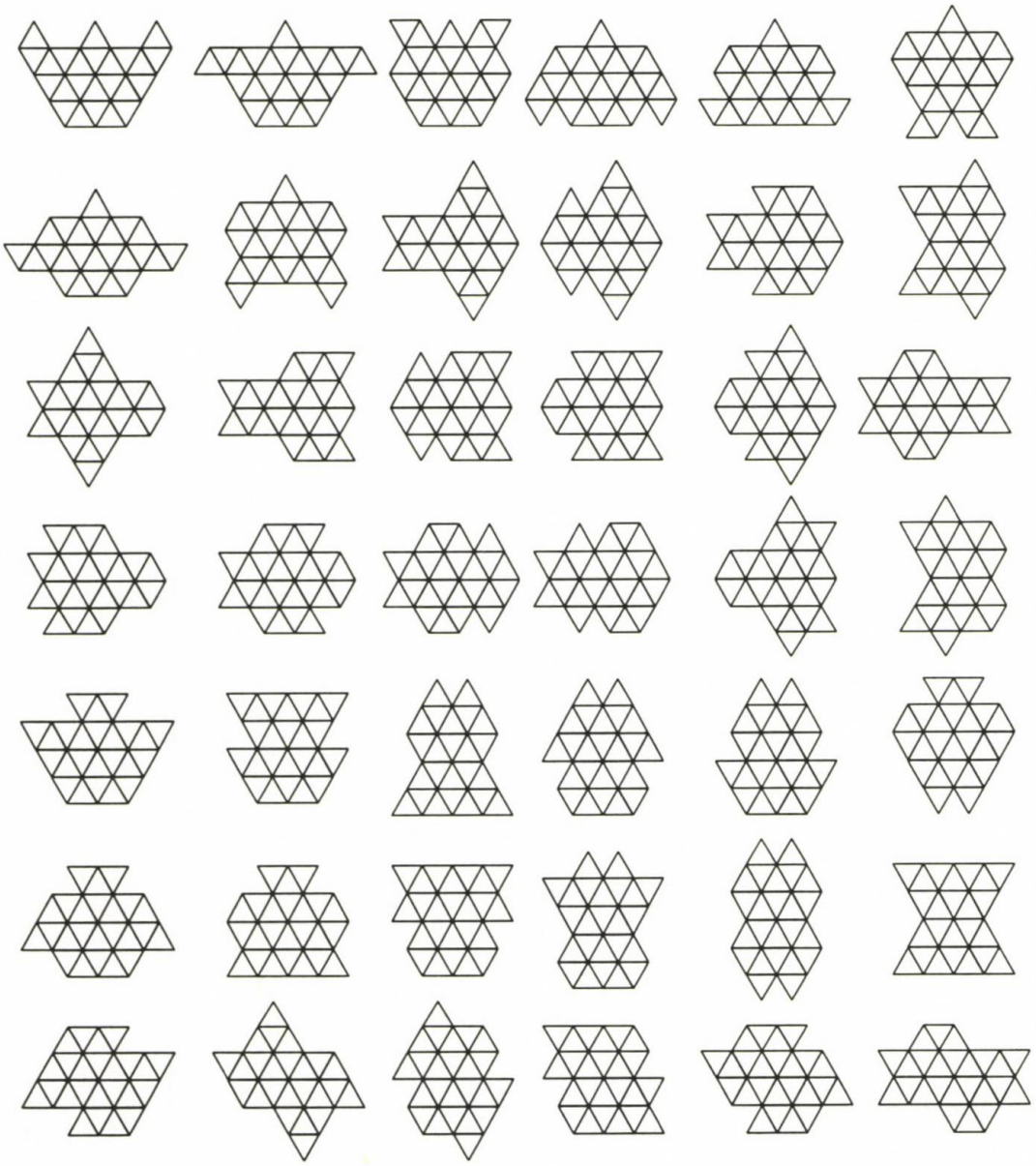


7. ábra

szög. A kérdés első részének megválaszolását egy általánosabb probléma megoldásával adjuk meg. Ez pedig a következő: Hány különböző szín esetén rakhatók össze az előálló triminólapok egyetlen szabályos háromszöggé, ha a dominó- és peremfeltételt figyelmen kívül hagyjuk? Ehhez tudnunk kell, hogy egybevágó, szabályos háromszögekből előállított bármely szabályos háromszögben lévő részháromszögek száma mindig négyzetszám. Így n különböző szín esetén a fenti általános probléma az

$$\frac{n(n^2+2)}{3} = m^2$$

diofantoszi egyenletre vezet, ahol m^2 jelenti az előállíthatónak feltételezett szabályos három-



8. ábra

szögben lévő triminólapok számát. Ezen egyenletnek $n < 5000$-ig csak $n \in \{1; 2; 24\}$ esetén van egész megoldása m-re. Ebből következik, hogy négy különböző szín esetén a 24 triminólap nem rakható össze egyetlen szabályos háromszöggé a dominó- és peremfeltétel egyidejű megtartásával. A szabályos hatszögre vonatkozó probléma pedig hasonló módon az

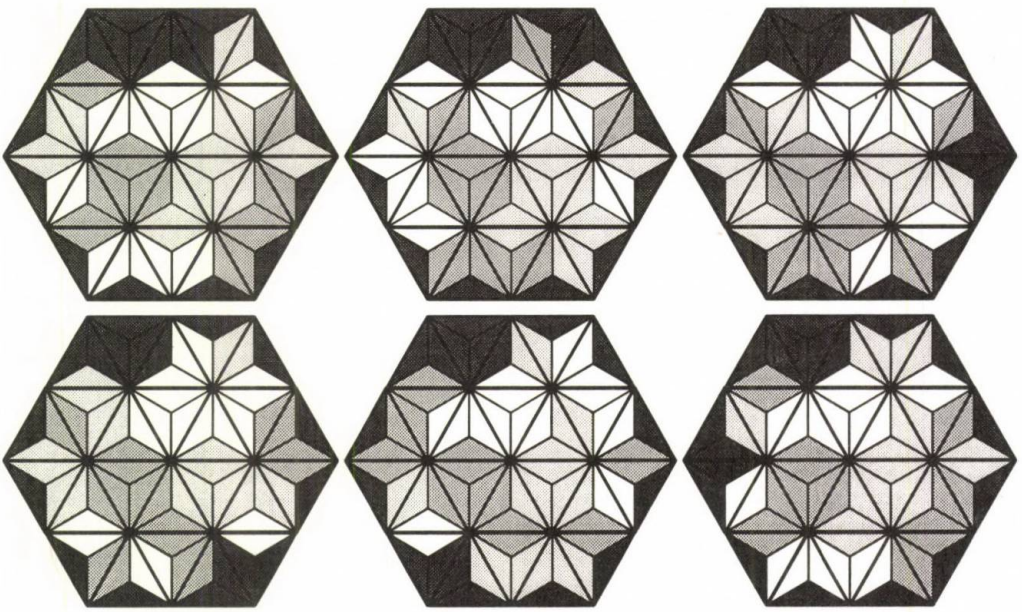
$$\frac{n(n^2+2)}{3} = 6m^2$$

diofantoszi egyenletre vezet, aminek m-re csak $n = 4$ esetén van egész megoldása. Így tehát szabályos hatszög csak négy különböző szín esetén rakható össze. Ennél több is igaz: 12 egység minimális kerületű sokszögként csak a szabályos hatszög fordulhat elő. Ilyen szabályos hatszög összeállításához jó tudni az alábbiakat:

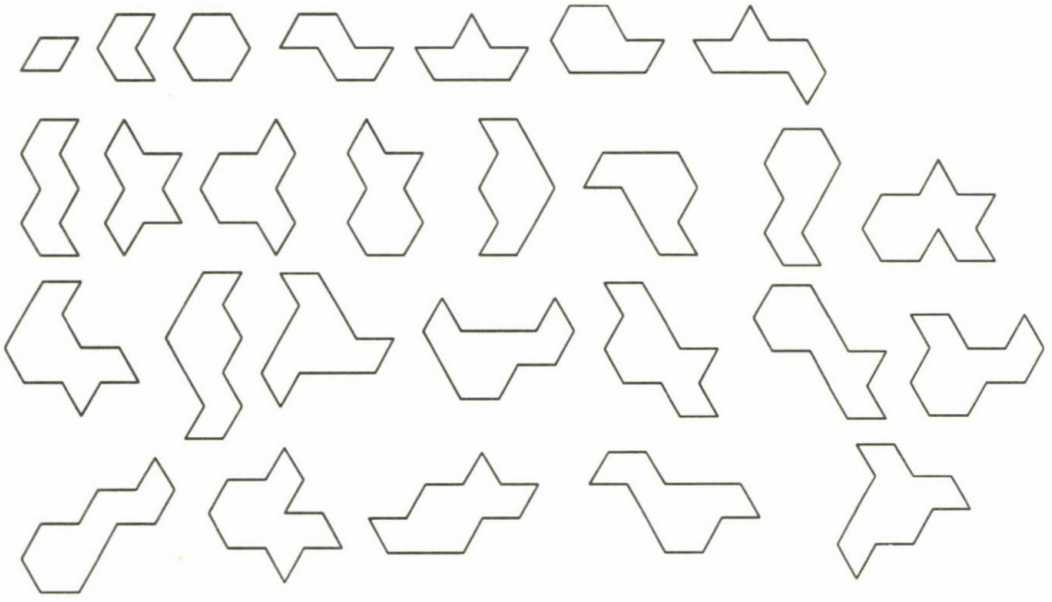
- egy rögzített peremszín esetén a peremszínt tartalmazó háromszögek hat különböző módon rendezhetők el (9. ábra),
- a nem peremszínű részháromszögek a hatszög belsejében az oldalak mentén kapcsolódva négy összefüggő részt alkotnak,
- minden ilyen részt páros számú részháromszög alkot,
- ha területegységnek a triminólap harmadát képező részháromszög területét választjuk, akkor az azonos színű belső részek összerülete 18 egység, továbbá egy szín esetén az oldalak mentén összefüggő legnagyobb rész területe 12 egység,
- a hatszög belsejében lévő, azonos színű részháromszögek oldalak mentén való összekapcsolódásából csak a 10. ábrán megadott valamelyik alakzat állhat elő.

A hatszögekre adott megoldásokban (9. ábra) az azonos színű részháromszögekből álló (de nem peremszínű) három triminólap a hatszög középpontja körül szimmetrikusan van elrendezve, ami nem feltétlenül szükséges feltétel (11. ábra).

A többszörözés problémája más-más peremszínű egybevágó alakzatok kirakását jelenti a teljes készlet minden elemének egyszeri felhasználásával, valamint a dominó- és peremfeltétel egyidejű megtartásával, miközben a kirakandó alakzat szimmetrikus voltát is előírhatjuk. Elvégezhető a kétszerezés, a háromszorozás és a négyszerezés. Eközben célszerű lehet a teljes készletet alkalmasan kettő, három illet-



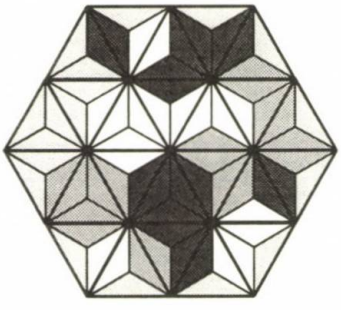
9. ábra



10. ábra

ve négy olyan csoportra felosztani, amelyek egyikéből a másik kettő a színek permutálásával megkapható. Például kétszerezésnél érdemes így eljárni az 1-22 alakzatok esetén, míg a 23-28 alakzatoknál ez a felosztás már nem vezet célra (12. ábra). A kétszerezés 28 darab, a háromszorozás 10 darab (13. ábra) szimmetrikus alakzat esetén végezhető el. A négyszerezéshez megjegyezzük, hogy az összesen létező 12 darab hexiamant közül 11-gyel végezhető el, s ebből 6 darab szimmetrikus van (14. ábra). Erről az ábráról még az is leolvasható, hogy a tisztán peremszínű lap áthelyezésével miként adódhat a többi alakzat négyszerezése.

Ha eltekintünk a teljes készlet felhasználásától, akkor a dominó- és peremfeltétel egyidejű megtartásával szabályos háromszögek kirakásával előállíthatók az 1, 4, 9 és 16 négyzetszámok. A 25 ilyen előállítása már csak úgy lehetséges, ha az összeállítandó háromszög belsejében lyukat engedünk meg. Ez a lyuk nem lehet egyetlen triminólap, mivel ekkor egy befelé mutató peremszínű részháromszög nem köthető le a dominófeltétellel. Ha viszont a tisztán peremszínű lap kizárásával két triminólapnyi lyukat engedünk meg, akkor elvégezhető egyetlen háromszög összeállítása, amely mindkét feltételt kielégíti, sőt a lyukként adódó rombusz szemközti oldalaira még a dominófeltétel is teljesül (15. ábra).

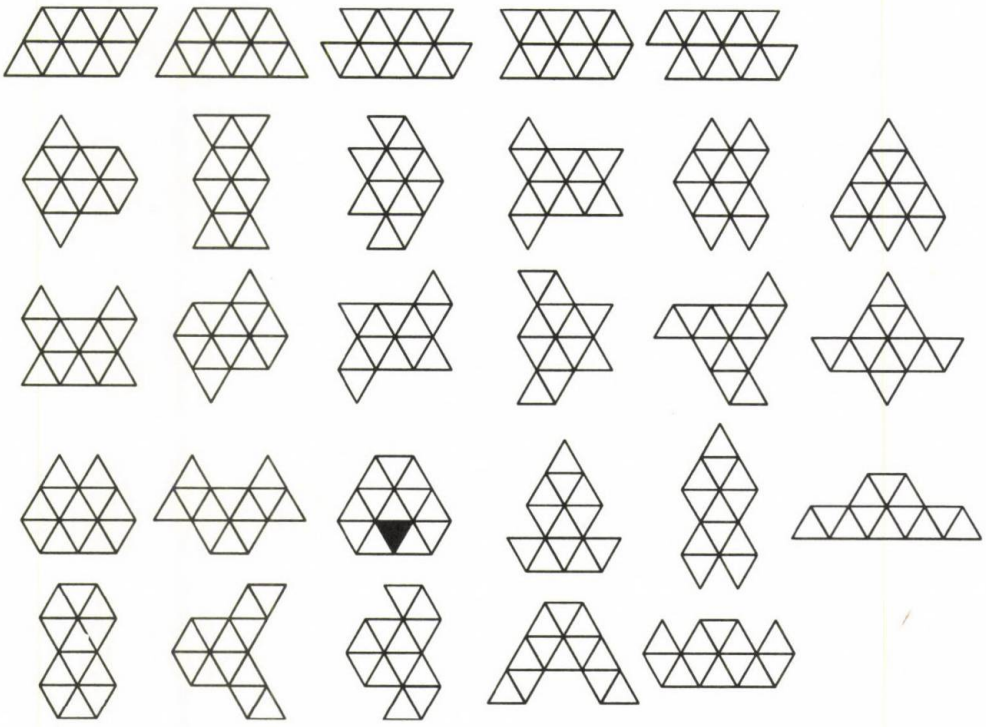


11. ábra

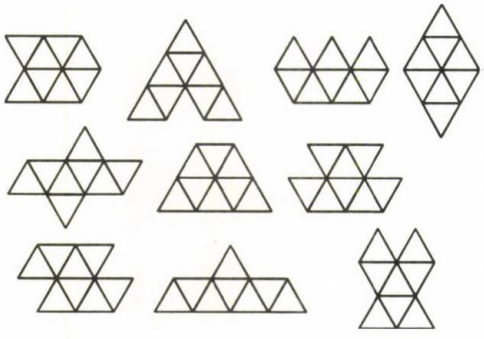
Visszatérve a különböző triminólapok megszámlálására, észrevehetjük, hogy ez egy olyan színezési problémát jelent, amely az ismert Pólya-tétel alapján is megoldható. Ezt a megoldást négy szín esetén mutatjuk be.

A triminólapokon a harmadrendű

$$G = \{(1)(2)(3), (123), (132)\}$$



12. ábra



13. ábra

ciklikus csoport hat, amelyben a permutációk ciklushosszaiként az 1 és 3 számok lehetségesek. Ezért a G csoport ciklusmutató polinomja

$$P(G: x_1, x_3) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} x_1^{r_1(g)} \cdot x_3^{r_3(g)}$$

alakú, ahol $r_i(g)$ jelöli valamely $g \in G$ permutálás i hosszúságú ciklusainak számát, x_i pedig az egyes ciklushosszhoz tartozó változó. Ezért a mi esetünkben

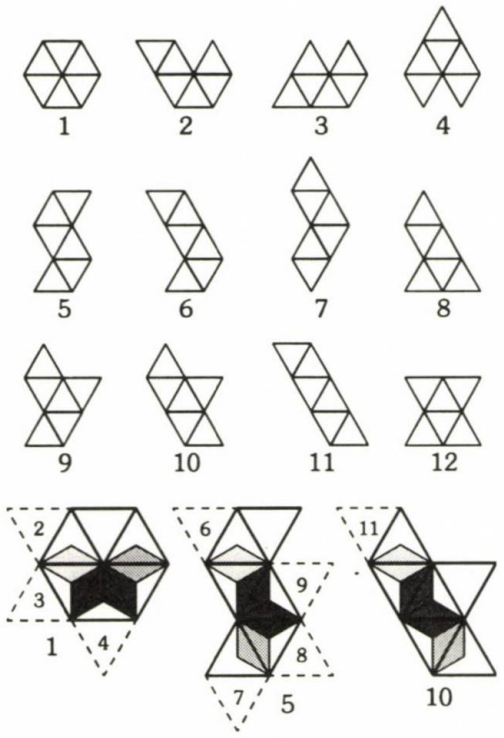
$$P(G: x_1, x_3) = \frac{1}{3} \cdot \left(x_1^3 + 2 \cdot x_3^1\right).$$

Ha a négy különböző (mondjuk piros, fehér, sárga és kék) színre bevezetjük a p, f, s, k változókat, akkor a Pólya-tétel szerint a $P(G: x_1, x_3)$ ciklusmutató polinomban x_1 helyére $(p + f + s + k)$ és x_3 helyére $(p^3 + f^3 + s^3 + k^3)$ behelyettesítése és a kijelölt műveletek elvégzése után a

$$\begin{aligned} P(G: p, f, s, k) = {} & 1 \cdot p^3 + 1 \cdot p^2 f + \\ & + 1 \cdot p^2 s + 1 \cdot p^2 k + 1 \cdot p f^2 + 1 \cdot p s^2 + \\ & + 1 \cdot p k^2 + 2 \cdot p f s + 2 \cdot p f k + 2 \cdot p s k + \\ & + 1 \cdot f^3 + 1 \cdot f^2 s + 1 \cdot f^2 k + 1 \cdot f s^2 + \\ & + 1 \cdot f k^2 + 2 \cdot f s k + 1 \cdot s^3 + 1 \cdot s^2 k + \\ & + 1 \cdot s k^2 + 1 \cdot k^3 \end{aligned}$$

polinom kapható, ahol például a $p^u f^v s^w$ tag együtthatója megadja azon triminólapok számát, amelyen u számú piros, v számú fehér és

w számú sárga részháromszög van. Így tehát a négy különböző színnel kiszínezhető különböző triminólapok száma egyenlő ezen polinom együtthatóinak összegével, ami éppen 24.



14. ábra

Irodalom

[1] Bereznai Gyula - Varecza Árpád: Egy versenyfeladat hátteréről. Acta Academiae Paedagogicae Nyíregyháziensis, Tom 9/I. 95-106. oldal

[2] Phil Boorman: Magnetic Games and Puzzles. Mathematics Teaching. 81, Dec. 1977. 12-15.

[3] Jens Carstensen: Legespiele. Der Mathematikunterricht. 2., 1980. 5-36.

[4] Darvasi Gyula: Egy színdominójáték: a quadromino. A matematika tanítása 5. 1986. 136-142. oldal

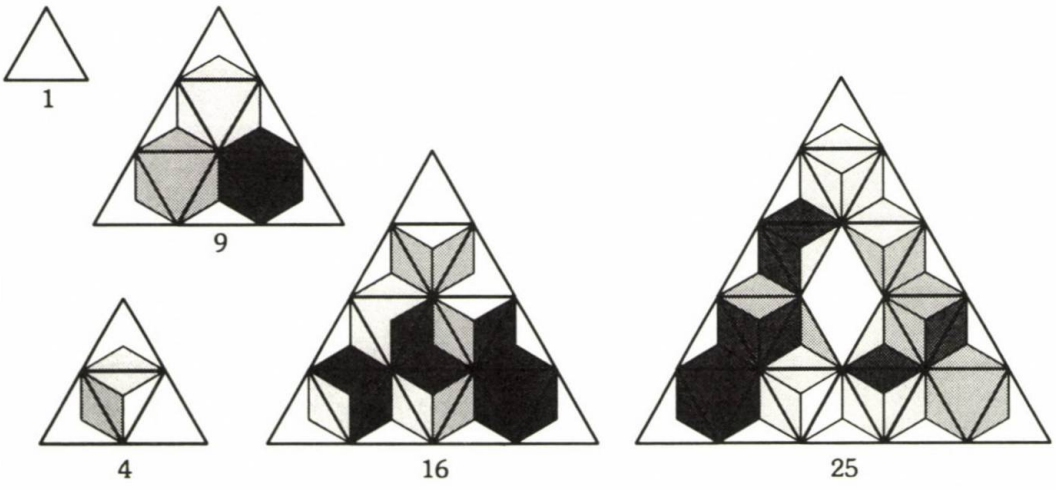
[5] Martin Gardner: Mathematical Magic Show. Penguin Books, 1985. 223-239.

[6] Helmut Gorenflo: Figuren-Abhandlung. Der Mathematikunterricht. 6. 1982. 45-61.

[7] Wade E. Philpott: Domino and Superdomino Recreations. - Part 6. Journal of Recreational Mathematics. Vol. 6. No. 1. Winter, 1973. 10-34.

[8] I. Tomescu: Kombinatorika és alkalmazásai. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1978.

[9] Darvasi Gyula: Pfeile aus Trimino-Hexiamant-Sternen. Praxis der Mathematik. 31. Nr. 2. 1989. 79.



15. ábra

Benkő József

A parabola parabolája, avagy a parabola mint jelkép és példabeszéd I. (Elemi körkép a dinamikus rendszerekről)

1. Elsődlegesen egy parabola család, az

$$f_\alpha(x) := \alpha x(x-1),\ x \in \mathbb{R},\ \alpha \in \mathbb{R}^+$$

viselkedését elemezzük, pontosabban azon bonyolult struktúrák és átmenetek felfedését követjük, melyeket az adott parabolasereg jelkép erejűen illusztrál. (Ezek a napjaink tudományának új határait jelentő kaotikus rendszerek a természeti és társadalmi viselkedésmódok megértésének legújabb stádiumai, s közkézre bocsátásuk minden szintű matematikaoktatásnak feladata, ezért elemzésünk példabeszéd).

2. *Ökológiai eredeztetés:* Ha egy adott biológiai népesség n-edik generációja p_n egyedből áll, nyilvánvaló feltevés, hogy az $(n+1)$-edik generáció p_{n+1} „lélekszáma" p_n-nel arányos: $p_{n+1} = kp_n$ (aszerint, hogy $0 < k < 1$, $k = 1$ ill. $k > 1$, a populáció csökken, stagnál ill. növekszik). Ha a k arányossági együttható minden generációra azonos, akkor $p_n = k^n p_0$ (p_0 a kezdeti létszám), tehát $0 < k < 1$ ill. $k > 1$ esetén $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$ ill. ∞, azaz az idők folyamán a népesség kipusztul ill. robbanásszerűen (minden határon túlra) növekszik.

(Ha ezt az inkább durvának, mint naívnak mondható ún. korlátlan növekedési modellt tovább nem finomítjuk, akkor a tudomány kezéből menthetetlenül kicsúszik, s a tömegkommunikáción keresztül a félelem szülte előítéletek és misztikus kifejletek táptalajává válik.)

Körültekintő gondossággal az előző elképzelést egy józanabb, a valóságot pontosabban tükröző képpé szelídíthetjük. E célból csupán azt a körülményt kell figyelembe venni, hogy az adott faj egy jól körülhatárolt „élettér" „foglya", s ez csak korlátolt számú (mondjuk N) egyed létfeltételét képes biztosítani. Ennek megfelelően, minden n-re: $p_n < N$, ami csak úgy érhető el, hogy a növekedési együttható generációról generációra változik: $p_{n+1} = k_n p_n$. Kézenfekvő az a feltevés is, hogy k_n egyenesen arányos az „élettér" még szabadon maradt $N - p_n$ felvevőképességével, azaz $k_n = A(N - p_n)$ (A állandó), tehát $p_{n+1} = Ap_n(N - p_n)$. Bevezetve az elfoglaltsági rátát kifejező $x_n = \frac{p_n}{N}$ változót, α-val jelölve az AN paramétert az előző egyenlőség:

$$x_{n+1} = \alpha x_n(1 - x_n),\ x_n \in [0, 1]$$

alakot ölt. Az így származtatott (x_n) $n \in \mathbb{N}$ sorozat az x_0 kezdeti értéknek $f_\alpha(x) = \alpha x(1-x)$ szerinti pályája. Ökológiai szempontból ezen pályák hosszú lejáratú alakulása érdekes, s mint látni fogjuk, az α paraméter és az x_0 kezdeti feltétel különféle értékeire igen változatos képet mutatnak.

Az alábbiakban látni fogjuk, hogy α kis értékeire $(0 < \alpha < 3)$ a pályák igen szabályosan viselkednek (monoton konvergálnak), $\alpha = 3$-ban egy bifurkációnak nevezett jelenség lép fel, ez végtelen sokszor megismétlődik az $\alpha \in (3, 4)$ különböző értékeire, s ebből kifolyólag egyes pályák a kezelhetetelenségig bonyolulttá válnak. Az $\alpha > 4$-re az ún. kaotikus pályák megjelenésével a komplikációk drámai feszültséget öltenek. Ez utóbbiak egyik jellegzetessége az „érzékenység" (miszerint bármilyen

közeli kezdeti feltételek hosszú távon teljesen eltérő eredményekhez vezetnek), s emiatt a számítógépes követés értelmét veszti, hisz a számítási pontatlanságok (pl. korlátos számú tizedesjegy használata s az ezzel járó kerekítések) a valóságtól teljesen eltérő értékekhez vezetnek. Nem marad más, mint a jelenség elméleti kezelése, s ennek szabatos tárgyalására egy minimális fogalomrendszer kiépítése.

3. *Diszkrét dinamikus rendszeren* olyan $[X, f]$ párokat értünk, ahol X nem üres halmaz, f pedig X-ből X-be vivő leképezés. Tetszőleges $n \in \mathbb{N}^+$-ra f^n alatt az n tagú $f \circ f \circ \ldots \circ f$ összetételt értjük, míg $f^0 := 1_X$ az X halmaz identikus leképezése. Az $x \in X$ pont f szerinti pályája a

$$\Theta_f(x) = \{x, f(x), f^2(x), \ldots, f^n(x), \ldots\},$$

azaz az $x_0 := x$ és $x_{n+1} := f(x_n)$ rekurzióval értelmezett sorozat.

A diszkrét dinamikus rendszerek feladatköre a $\{\Theta_f(x) \mid x \in X\}$ pályák tanulmányozása.

A legegyszerűbb pályák végesek. Ha $\Theta_f(x) = \{x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x)\}$ és a felsorolt pontok különbözőek, akkor $f^n(x) \in \Theta_f(x)$-ből következik olyan $m \in \{0; 1; \ldots; n-1\}$ létezése, hogy $f^n(x) = f^m(x)$. Ha $m = 0$, akkor x-et f-re nézve n-periódusú pontnak mondjuk, ha pedig $m \geq 1$, akkor $y := f^m(x)$ f-re nézve $(n-m)$-periódusú. $\mathrm{Per}_n(f)$-fel jelöljük az összes n-periódusú pontok halmazát. $\mathrm{Per}(f)$-fel pedig az összes periodikus pontok halmazát, azaz

$$\mathrm{Per}(f) = \coprod_{n=1}^{\infty} \mathrm{Per}_n(f)$$ ($\coprod$ a diszjunkt unió jele).

LEMMA: (i) Az x pont akkor és csak akkor periodikus, ha létezik olyan $m \in \mathbb{N}^*$, amelyre $f^m(x) = x$.

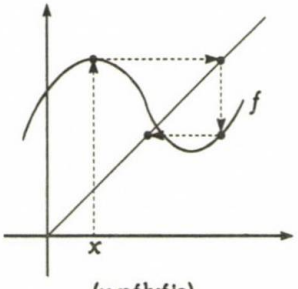
(ii) Egy n periódusú x pont esetén $f^m(x) = x$ akkor és csakis akkor, ha $n \mid m$.

(iii) $\mathrm{Per}_1(f^m) = \coprod_{n \mid m} \mathrm{Per}_n(f)$.

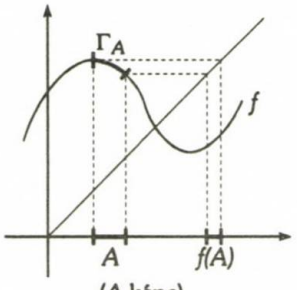
BIZONYÍTÁS (i) és (ii): Ha az $\{m \in \mathbb{N}^+ \mid f^m(x) = x\}$ halmaz nem üres és n a legkisebb eleme, míg $m = kn + r$ a maradékos osztás egyenlősége, akkor $f^m(x) = x$ maga után vonja az $f^{kn}(x) = x$-et, majd $r < n$ és $x = f^m(x) = f^{r+kn}(x) = f^r(f^{kn}(x)) = f^r(x)$ alapján: $r = 0$. (iii) világos következménye az előzőeknek. Belőle az derül ki, hogy a periodikus pontok tárgyalása mindig visszavezethető az 1-periódusú ún. *fixpontokra*.

4. *A pályák grafikus követése* $\mathbb{R}$ *esetén.* $X = \mathbb{R}$ esetén az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ által értelmezett dinamikus rendszer követésére az f függvény grafikus képét, valamint a szögfelezőt együttesen ábrázoljuk. A tetszőlegesen kiválasztott $x \in \mathbb{R}$ pont kifejlődését úgy követjük nyomon, hogy az $(x; 0)$ pontból indulva függőlegesen megyünk a grafikon $(x; f(x))$ pontjába, onnan vízszintesen a szögfelező $(f(x); f(x))$ pontjába, majd ismét függőlegesen a grafikon $(f(x); f^2(x))$ pontjába, és így tovább. A szögfelezőn így megjelenő $(x; x)$, $(f(x); f(x))$, $(f^2(x); f^2(x))$, ... sorozat vetülete az abszcisszatengelyre nem más, mint x pályája: $x, f(x), f^2(x), \ldots$

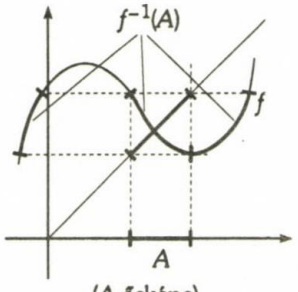
Az eljárás nemcsak az egyedi pontok, hanem a részhalmazok f szerinti szukcesszív képének, illetve az egymást megelőző ősképének (viszont képének) a követésére is alkalmas.



(x pályája)



(A képe)



(A ősképe)

E célból a szóban forgó $A \subset \mathbb{R}$ halmazt először felvisszük a grafikonra a $\Gamma_A = \{(x; f(x)) \mid x \in A\}$ halmaz képébe, majd onnan vízszintesen haladva rátérünk a szögfelezőre, és végül visszavetítjük az abszcisszatengelyre az $f(A)$ képeként. Ha az ősképet keressük, akkor először a szögfelezőn vesszük a $\Delta_A = \{(x; x) \mid x \in A\}$ halmazt, onnan vízszintesen megyünk a grafikonra, s az így kapott halmaz vetülete az x tengelyre az $f^{-1}(A)$ ősképe lesz.

5. *A periodikus pontok multiplikátora.* A következőkben csak végtelen sokszor deriválható $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ leképezésekkel foglalkozunk. A $p \in \mathrm{Per}_n(f)$ n-periódusú pont multiplikátorán f^n-nek p-beli deriváltját, az $f^{n\prime}(p)$ számot értjük. Amint az alábbiakból kiderül, a rendszer magatartását a periodikus pontok környezetében a multiplikátor irányítja. Ezt a körülményt indokolja az a tény, hogy a multiplikátor nem más, mint a függvény pályapontokon vett deriváltjainak a szorzata.

Ennek belátására utalunk az alábbi indukciós gondolatmenetre: $(f^{k+1})'(x) = (f \circ f^k)'(x) = f'(f^k(x)) \cdot (f^k)'(x) = f'(f^k(x)) \cdot f'(f^{k-1}(x)) \cdot \ldots \cdot f'(x)$. Ebből $p \in \mathrm{Per}_n(f)$ és $p_1 = p$, $p_2 = f(p)$, ..., $p_n = f^{n-1}(p)$ estén, $\Theta_f(p) = \{p_1, \ldots, p_n\}$ és $(f^n)'(p) = f'(p_1) \cdot f'(p_2) \cdot \ldots \cdot f'(p_n)$ adódik.

A szóban forgó periodikus pontot *vonzó*nak illetőleg *taszító*nak, együttesen *hiperbolikus*nak mondjuk aszerint, hogy $|f^{n\prime}(p)| < 1$, ill. > 1; ha a multiplikátor ± 1, akkor *közömbös* pontról beszélünk. A „vonzó", „taszító" megnevezést az alábbi tétel indokolja:

TÉTEL: (i) Ha $p \in \mathrm{Per}_n(f)$ vonzó, akkor létezik olyan $r > 0$ szám, hogy bármely $x \in]p-r, p+r[$-re $\lim\limits_{k\to\infty} f^{kn}(x) = p$.

(ii) Ha $p \in \mathrm{Per}_n(f)$ taszító, akkor létezik olyan $r > 0$ szám, hogy bármely $x \in]p-r, p+r[$-re létezik olyan $k_x \in \mathbb{N}$, hogy $f^{k_x n}(x) \notin (p-r, p+r)$.

BIZONYÍTÁS: Legyen $g := f^n$, tehát $g^k = f^{kn}$. A feltevés szerint $|g'(p)| = |f^{n\prime}(p)| \neq 1$. Legyen ρ egy szigorúan 1 és $|g'(p)|$ közt lévő rögzített szám, $r > 0$ pedig olyan, hogy minden $x \in]p-r, p+r[$-re $|g'(x)| < \rho$, illetve $> \rho$ aszerint, hogy az (i) illetve (ii) esetet vizsgáljuk.

Az *(i) esetben* induktíven igazoljuk, hogy bármely $k \in \mathbb{N}^+$-ra: $|g^k(x) - p| \leq \rho^k |x - p|$ (mivel ebben az esetben $\rho < 1$, következni fog az állított $\lim\limits_{k\to\infty} |g^k(x) - p| = 0$ határérték). A $k = 1$ értékre (figyelembe véve, hogy $g(p) = f^n(p) = p$ a Lagrange-féle véges növekedési tétel alapján létezik olyan x és p közötti $\overline{x}$ szám, hogy $|g(x) - g(p)| = |g'(\overline{x})| \, |x - p| < \rho |x - p|$, hisz $\overline{x} \in]p-r, p+r[$ és ezért $|g'(\overline{x})| < \rho$.

Ha az állítás k-ra igaz, akkor $(k+1)$-re az előző gondolatmenettel térünk át: $|g^{k+1}(x) - g^{k+1}(p)| = |g(g^k(x)) - g(g^k(p))| = |g'(\overline{\overline{x}})| \, |g^k(x) - g^k(p)| < \rho \cdot \rho^k |x - p|$ (az indukciós hipotézis következtében, valamint $\rho < 1$ alapján $g^k(x) \in]p-r, p+r[$ és ezért a Lagrange-tételből adódó $\overline{\overline{x}}$ szám is ebben az intervallumban van, tehát $|g'(\overline{\overline{x}})| < \rho$).

Az *(ii) esetben* szintén indukcióval igazoljuk az alábbi implikációt:

$$\{x, g(x), \ldots, g^k(x) \in]p-r, p+r[\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \{|g^l(x) - p| \geq \rho^l |x - p|, \; l = 1, \ldots, k+1\}.$$

Ha $k = 0$, akkor $l = 1$, és $|g(x) - p| = |g(x) - g(p)| = |g(\overline{x})| \, |x - p| > \rho |x - p|$. Ha $x, g(x), \ldots, g^k(x), g^{k+1}(x) \in]p-r, p+r[$, akkor a következményt csak $(k+2)$-re kell ellenőrizni: $|g^{k+2}(x) - g^{k+2}(p)| = |g(g^{k+1}(x)) - g(g^{k+1}(p))| = |g'(\overline{\overline{x}})| \, |g^{k+1}(x) - g^{k+1}(p)| > \rho \cdot \rho^{k+1} |x - p|$ (mert $g^{k+1}(x) \in]p-r, p+r[$-ből kifolyólag a Lagrange-féle $\overline{\overline{x}}$ ugyanebben az intervallumban van, tehát $|g'(\overline{\overline{x}})| > \rho$).

Mivel ebben az esetben $\rho > 1$ (tehát $\rho^k \to \infty$, ha $k \to \infty$), ezért nem lehet, hogy minden k-ra $g^k(x) \in (p-r, p+r)$, mert ellenkező esetben a $\lim\limits_{k\to\infty} |g^k(x) - p| = \infty$ ellentmondáshoz jutnánk.

6. *Az $f_\alpha(x) = \alpha x(1-x)$ függvény 1-periódusú pontjai, és az $\alpha \in]0, 3[$ eset tárgyalása:* Mivel az $f_\alpha(x) = x$ egyenletnek csak

$x = 0$ és $p_\alpha = 1 - \frac{1}{\alpha}$ a megoldásai, ezért $\mathrm{Per}_1(f_\alpha) = \left\{0, 1 - \frac{1}{\alpha}\right\}$. Az $f_\alpha'(x) = \alpha(1 - 2x)$ alapján $f_\alpha'(0) = \alpha$, illetve $f_\alpha'\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) = 2 - \alpha$, és így $p = 0$ vonzó, közömbös ill. taszító $\alpha < 1$, $\alpha = 1$ ill. $\alpha > 1$ esetén, míg $p_\alpha = 1 - \frac{1}{\alpha}$ vonzó $\alpha \in]1, 3[$-ra, közömbös $\alpha = 1$, 3-ra és taszító $\alpha \in]0, 1[\cup]3, \infty[$-re.

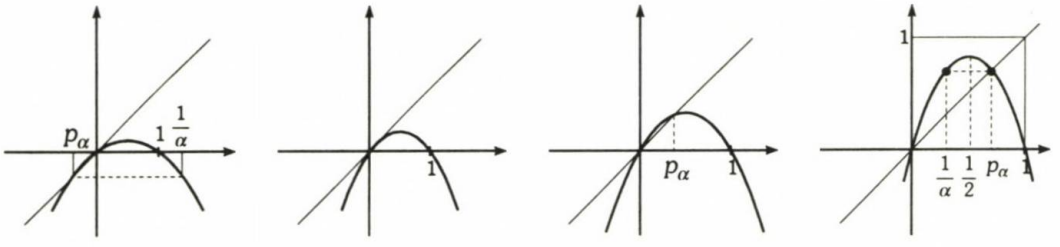
Az $\alpha \in (0, 3)$ értékeire f_α pályái könnyen leírhatók.

TÉTEL: (i) Ha $\alpha \in]0, 1[$, akkor minden $x \in \left]1 - \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right[$-ra $f_\alpha^n(x) \to 0$, ha $n \to \infty$, míg az összes $x \notin \left]1 - \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right[$-ra $f_\alpha^n(x) \to -\infty$, ha $n \to \infty$. (Világos, hogy $f_\alpha^n\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) = 1 - \frac{1}{\alpha} = f_\alpha^m\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ minden $n \in \mathbb{N}$ és $m \in \mathbb{N}^+$-ra.)

(ii) Ha $\alpha = 1$, akkor minden $x \in [0, 1]$-re: $f_1^n(x) \to 0$, ha $n \to \infty$, míg az összes $x \notin [0, 1]$-re $f_1^n(x) \to -\infty$, ha $n \to \infty$.

(iii) Ha $\alpha \in]1, 3[$, akkor az összes $x \notin [0, 1]$-re: $f_\alpha^n(x) \to -\infty$, ha $n \to \infty$, és minden $x \in]0, 1[$-re: $f_\alpha^n(x) \to 1 - \frac{1}{\alpha}$, ha $n \to \infty$. (Világos, hogy $f_\alpha^n(0) = f_\alpha^m(1)$ bármely $n \in \mathbb{N}$ és $m \in \mathbb{N}^+$-ra.)

BIZONYÍTÁS: A mellékelt 4 ábrán az $\alpha \in]0, 1[$, $\alpha \in]1, 2]$ és az $\alpha \in]2, 3]$ esetek vannak felvázolva. Segítségükkel a pályákat grafikusan követve a bizonyítások könnyen elvégezhetők az $\alpha \in]1, 3[$ és $x \in]0, 1[$ esetet leszámítva. A következőkben csak ezzel a kivétellel foglalkozunk.



$0 < \alpha < 1$ $\alpha = 1$ $1 < \alpha \le 2$ $2 < \alpha \le 3$

Az $\alpha \in]1, 2]$ eset jellemzője, hogy a $p_\alpha = 1 - \frac{1}{\alpha}$ fixpont az $x = \frac{1}{2}$ maximumpontnál kisebb. Ha $x \in]0, p_\alpha[$, akkor f_α növekedése, valamint az $f_\alpha(x) > x$ miatt: $0 < x < p_\alpha$ maga után vonja, hogy $0 < x < f_\alpha(x) < f_\alpha(p_\alpha) = p_\alpha$. Ennek ismételt alkalmazásával azt kapjuk, hogy az $\left(f_\alpha^n(x)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat szigorúan növekedő és p_α egy felső korlátja. Ebből a sorozat konvergenciája következik, majd f_α folytonossága révén, ha $q := \lim_{n \to \infty} f_\alpha^n(x)$, akkor $f(q) = \lim_{n \to \infty} f_\alpha^{n+1}(x) = q$. Mivel p_α f_α-nak egyetlen $]0, 1[$-beli fixpontja, ezért $q = p_\alpha$, azaz $\lim_{n \to \infty} f_\alpha^n(x) = p_\alpha$.

Ha $x \in \left]p_\alpha, \frac{1}{2}\right]$, akkor f_α növekedése, valamint az $f_\alpha(x) \le x$ egyenlőtlenség alapján: $p_\alpha < x \le \frac{1}{2}$ maga után vonja, hogy $p_\alpha < f_\alpha(x) < x$. Ekkor tehát az $\left(f_\alpha^n(x)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat szigorúan csökkenve tart a p_α értékhez (a részletek az előző gondolatmenet megismétlései).

Az $x \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$ visszavezethető a már tárgyalt esetekre, mert f_α szimmetriája miatt létezik olyan $x' \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$, hogy $f_\alpha(x') = f_\alpha(x)$.

Az $\alpha \in]2, 3]$ esetben először azt látjuk be, hogy elég csak az $x \in \left[\frac{1}{2}, p_\alpha\right]$ pontok pályáit elemezni, hiszen bármely $y \in]0, 1[$-re létezik olyan k és $x \in \left]\frac{1}{2}, p_\alpha\right[$, hogy $f_\alpha^{k+1}(y) = x$, vagy $f(x)$. Ez utóbbi állítást f_α szimmetriája miatt elég csak $y \in \left]0, \frac{1}{\alpha}\right[$-ra igazolni. E célból legyen

$$K = \left\{ m \in \mathbb{N} \mid f_\alpha^i(y) \in \left]0, \frac{1}{\alpha}\right[, i = 0, 1, \ldots, m \right\}$$

(például: $m = 0 \in K$). A K halmaz véges kell legyen, mert ellenkező esetben f_α növekvő volta, valamint a $\left]0, \frac{1}{\alpha}\right[$-án érvényes $f_\alpha(x) > x$ alapján $\left(f_\alpha^n(y)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ szigorúan növekedne f_α-nak egy fix pontja felé, ilyen pont a $\left]0, \frac{1}{\alpha}\right]$-ban pedig nincsen.) Ha k a K halmaz legnagyobb eleme, akkor $f_\alpha^{k+1}(y) = f_\alpha(f_\alpha^k(y)) \in f_\alpha\left(\left]0, \frac{1}{\alpha}\right[\right) =]0, p_\alpha[$ és mivel $f_\alpha^{k+1}(y) \notin \left]0, \frac{1}{\alpha}\right[$, ezért $f_\alpha^{k+1}(y) \in \left[\frac{1}{\alpha}, p_\alpha\right]$. Innen vagy az következik, hogy maga a pont van az $\left[\frac{1}{2}, p_\alpha\right]$-ban, vagy az, hogy létezik olyan $x \in \left[\frac{1}{2}, p_\alpha\right]$, amelyre $f_\alpha^{k+1}(y) = f_\alpha(x)$.

Az $x \in \left[\frac{1}{2}, p_\alpha\right]$-ra vonatkozó bizonyítást – a következő szakaszból kölcsönzött – alábbi két tulajdonságra alapozzuk:

(a) $2 \le \alpha \le 3$-ra $f_\alpha^{2\prime\prime}(x) > 0$, minden $x \in \left[\frac{1}{2}, p_\alpha\right]$-ra,

(b) $\alpha \le 3$-ra $\mathrm{Per}_2(f_\alpha) = \emptyset$.

Először azt igazoljuk, hogy

(c) $x \le f_\alpha^2(x) \le p_\alpha$ minden $x \in \left[\frac{1}{2}, p_\alpha\right]$-ra.

A jobb oldali egyenlőtlenség világos, hisz $f_\alpha\left(\left[\frac{1}{2}, p_\alpha\right]\right) = \left[p_\alpha, f_\alpha\left(\frac{1}{2}\right)\right] = \left[p_\alpha, \frac{\alpha}{4}\right]$, tehát $f_\alpha^2\left(\left[\frac{1}{2}, p_\alpha\right]\right) = f_\alpha\left(\left[p_\alpha, \frac{\alpha}{4}\right]\right) = \left[f_\alpha\left(\frac{\alpha}{4}\right), f(p_\alpha)\right] = \left[f_\alpha\left(\frac{\alpha}{4}\right), p_\alpha\right]$. A bal oldali egyenlőtlenség p_α-ban igaz, a benne szereplő függvények $x \le f_\alpha^2(x)$ deriváltjaira pedig fennáll az $1 \ge f_\alpha^{2\prime}(x)$ egyenlőtlenség, hisz (a) szerint $f_\alpha^{2\prime}$ növekvő, és a szóban forgó egyenlőtlenség p_α-ban igaz, mert $f_\alpha^{2\prime}(p_\alpha) = f_\alpha'(f_\alpha(p_\alpha)) \cdot f_\alpha'(p_\alpha) = (f_\alpha'(p_\alpha))^2 = (\alpha - 2)^2 \le 1$.

A (c)-beli egyenlőtlenség alapján: $\left(\frac{1}{2} \le\right) x \le f_\alpha^2(x) \le f_\alpha^4(x) \le \ldots \le f_\alpha^{2n}(x) \le \ldots (\le p_\alpha)$, tehát létezik $\lim_{2n \to \infty} f_\alpha^{2n}(x) =: q \ (\le p_\alpha)$. Ebből f_α^2 folytonossága alapján adódik, hogy $f_\alpha^2(q) = q$. Mivel (b) szerint 2-periódusú pont nem létezik, ezért kötelezően $f_\alpha(q) = q$, tehát $q = p_\alpha$. Ezek után $f^{2n}(x) \to p_\alpha$, ha $n \to \infty$ maga után vonja, hogy $f_\alpha^{2n+1}(x) \to f_\alpha(p_\alpha) = p_\alpha$, ha $n \to \infty$, tehát $\lim_{n \to \infty} f_\alpha^n(x) = p_\alpha$.

Megjegyzések. A dolgok természetéből adódóan meg kellett különböztetnünk az $\alpha \in]1, 2]$ illetve $\alpha \in]2, 3[$ eseteket aszerint, hogy a p_α-fixpont az $x = \frac{1}{2}$ maximumpont előtt ill. után következik. Az első esetben f_α növekvő ága metszette a szögfelezőt, és ezért a pontok pályái monotonok voltak. A második esetben f_α leszálló ágára esik a p_α pont, és ebből kifolyólag a pályák spirálisan „csavarodnak be" a fixponthoz. A két eset közti fajsúlykülönbség jól illusztrálja azt a kitételünket, hogy a növekedésével az f_α dinamikus rendszer viselkedése mind bonyolultabbá válik. A

komplikálódás okára a következő szakaszban jövünk rá, ahol is bebizonyítjuk, hogy f_α-nak $\alpha \le 3$-ra nincs 2-periódusú pontja, de $\alpha > 3$-ra már van. A periodikus pontok keletkezése egy teljesen újszerű – *bifurkáció*nak nevezett – jelensége a dinamikus rendszerek egyik alaptémája. Esetünkben α-nak 3-tól 4-ig tartó növekedése folyamán f_α végtelen sokszor bifurkálódik úgy, hogy $\alpha \ge 4$-re már minden rendű periodikus pontja létezik. Terjedelmi okokból ezen a fejlődési szakaszon átugrunk, és csak az $\alpha \ge 4$ végkifejlet állapotát tárgyaljuk, ahol is újabb – az eddigieknél jóval drámaibb – jelenség lép fel, nevezetesen az, hogy a rendszer egy része kaotikussá válik.

7. *Az $\alpha = 3$-beli bifurkáció.* Az $f_\alpha \alpha = 3$ körüli minőségi átalakulását az alábbi tétel írja le.

TÉTEL: $\alpha \le 3$-ra f_α-nak nincs 2-periódusú pontja, míg $\alpha > 3$-ra két ilyen pont létezik, az egyik $p_\alpha^{\cdot} \in]0, p_\alpha[$, a másik pedig $p_\alpha^{\cdot\cdot} \in]p_\alpha, 1[$.

BIZONYÍTÁS: A tétel igazolására, valamint a mellékelt ábrák megrajzolásához kiszámítjuk f_α^2 legfontosabb adatait:

$f_\alpha^2(x) = f_\alpha(f_\alpha(x)) = \alpha^2 x(1-x)(\alpha x^2 - \alpha x + 1)$;
zérushelyei ($\alpha <$ 1-re): 0, 1;

$f_\alpha^{2\prime}(x) = \alpha^2(1-2x)(2\alpha x^2 - 2\alpha x + 1)$;
zérushelyei ($\alpha >$ 2-re): $\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \pm \sqrt{1 - \frac{2}{\alpha}}$;

$f_\alpha^{2\prime\prime}(x) = 12\alpha^3\left(x(1-x) - \frac{\alpha+1}{6\alpha}\right)$;
zérushelyei ($\alpha >$ 2-re):

$$\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2\sqrt{3}}\sqrt{1-\frac{2}{\alpha}} =: q_\alpha^{\mp}.$$

Mivel a második derivált a gyökök közt pozitív, az előző szakaszban használt $f_\alpha^{2\prime\prime} > 0$ feltétel azért teljesül az $\left]\frac{1}{2}, p_\alpha\right[$ szakaszon $\alpha \in]2, 3[$-ra, mert $p_\alpha = 1 - \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\sqrt{1-\frac{2}{\alpha}} = q_\alpha^-$ pontosan az $\alpha \in]2, 3[$ értékeire igaz. Úgyszintén $\alpha \in]2, 3[$-ra igaz, hogy

$$f_\alpha^2(x)\begin{cases} > x, \text{ ha } x \in]0, p_\alpha[\\ < x, \text{ ha } x \in]p_\alpha, 1[\end{cases},$$

(amiből következik, hogy f_α^2-nek p_α-n kívül más fixpontja nincsen). Ennek belátására legyen

$$f_\alpha^2(x) - x = \\ = x(\alpha^2(1-x)(\alpha x^2 - \alpha x + 1) - 1) =: xg(x).$$

Ekkor

$$g'(x) = -\alpha^2(3\alpha x^2 - 4\alpha x + 1 + \alpha) \le 0,$$

hisz diszkriminánsa

$$4\alpha^2 - 3\alpha(1+\alpha) = \alpha(\alpha - 3) < 0.$$

Mivel g csökkenő és $g(p_\alpha) = 0$, ezért $g(x) \ge 0$ ill. ≤ 0 aszerint, hogy $x <$, ill. $x > p_\alpha$.

Az $\alpha = 3$-ra $p_\alpha = q_\alpha^+ = \frac{2}{3}$ és $f_\alpha^{2\prime}\left(\frac{2}{3}\right) = 1$, tehát f_α^2 érintőleg halad át a szögfelezőn, miközben konvexből konkávba megy át.

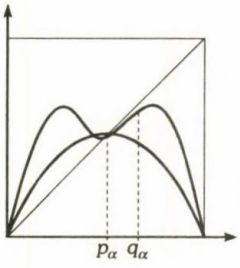
Az $\alpha > 3$-ra: $f_\alpha^{2\prime}(p_\alpha) = (\alpha - 2)^2 > 1$, tehát folytonossági meggondolásból az egyenlőtlenség kiterjeszthető egy $]p_\alpha - r, p_\alpha + r[$ $(r > 0)$ intervallumra. Az $f_\alpha^2 > 1$ egyenlőtlenségből (például integrálással) következik, hogy

$$f_\alpha^2(x)\begin{cases} > x, \text{ ha } x \in]p_\alpha, p_\alpha + r[\\ < x, \text{ ha } x \in]p_\alpha - r, p_\alpha[\end{cases}.$$

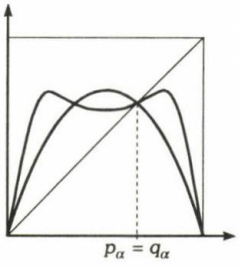
Mivel $f_\alpha^2(x) - x > 0$ a $]p_\alpha, p_\alpha + r[$-en, míg $x = 1$-ben értéke -1, ezért léteznie kell egy olyan $p_\alpha^{\cdot\cdot} \in]p_\alpha, 1[$ pontnak, ahol eltűnik, azaz $f_\alpha^2(p_\alpha^{\cdot\cdot}) = p_\alpha^{\cdot\cdot}$. Az $f_\alpha^2(x) - x < 0$, $x \in]p_\alpha - r, p_\alpha[$, valamint egy $]0, \varepsilon[$-ra könnyen belátható $f_\alpha^2(x) - x > 0$, egyenlőtlenségekből következik

olyan $p_\alpha^{\cdot} \in]0, p_\alpha[$ létezése, amelyre $f_\alpha^2(p_\alpha^{\cdot}) = p_\alpha^{\cdot}$.

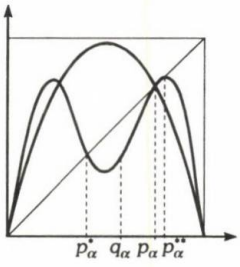
Az így megszerkesztett $p_\alpha^{\cdot}$ $(< p_\alpha <)$ $p_\alpha^{\cdot\cdot}$ pontok f_α-nak 2-periódusú pontjai, mert $]0, 1[$-ben p_α-án kívül más 1-periódusú pontja nincs. Mivel $f_\alpha^2(x) - x = 0$ negyedfokú, és 0, $p_\alpha^{\cdot}$, p_α, $p_\alpha^{\cdot\cdot}$ ennek négy különböző gyöke, ezért más gyökei nem lehetnek, azaz $\mathrm{Per}_2(f_\alpha) = \mathrm{Per}_1(f_\alpha^2) \setminus \mathrm{Per}_2(x) = \{p_\alpha^{\cdot}, p_\alpha^{\cdot\cdot}\}$.



$\alpha < 3$



$\alpha = 3$



$\alpha > 3$

Inczeffy Szabolcs

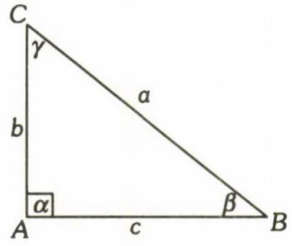
A trigonometrikus függvények (szögfüggvények) általános alakjai

Az ismert trigonometrikus függvényeket az A-ban derékszögű háromszögben a következőképpen írjuk fel: ha $\alpha = 90°$; $\beta, \gamma \neq 0$, és $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, akkor

$$\sin\beta = \frac{b}{a} \quad a \neq 0,$$

$$\cos\beta = \frac{c}{a} \quad a \neq 0,$$

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{1}{\mathrm{ctg}\beta} = \frac{b}{c} \quad c \neq 0.$$



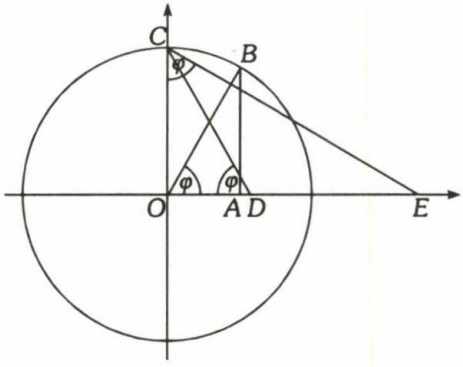
Általánosabb definíció adható egységsugarú körben, ahol ha $|OB| = 1$ és $|OC| = 1$, akkor:

$$\sin\varphi = |AB|; (\forall)\ \varphi \in \mathbb{R};$$

$$\cos\varphi = |OA|; (\forall)\ \varphi \in \mathbb{R};$$

$$\mathrm{tg}\varphi = |OE|; (\forall)\ \varphi \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}; k \in \mathbb{Z};$$

$$\mathrm{ctg}\varphi = |OD|; (\forall)\ \varphi \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}; k \in \mathbb{Z}.$$

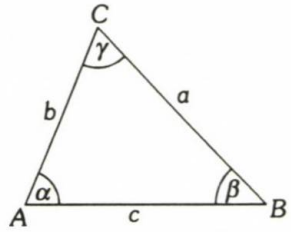


Egy ABC általános háromszögben, ahol az $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$ szögek tetszőleges értékűek úgy, hogy teljesítik az $\alpha+\beta+\gamma=180°$ feltételt, meghatározhatók még általánosabb szögfüggvények. Legyen $\alpha \neq 0, 180°$ az alapszög, ekkor felírhatók a következő definíciók:

$$\sin_\alpha \gamma \frac{c}{a},\ a \neq 0;$$

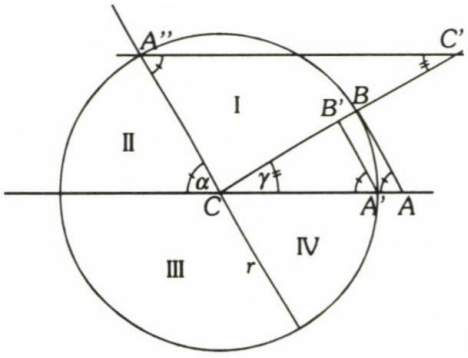
$$\cos_\alpha \gamma \frac{b}{a},\ a \neq 0;$$

$$\mathrm{tg}_\alpha \gamma \frac{1}{\mathrm{ctg}_\alpha \gamma} = \frac{c}{b},\ b \neq 0.$$



Az egységsugarú kör segítségével az általános szögfüggvények definiálása az alábbi módon történik ($r = 1$):

szögfüggvény	értelmezési tartomány
$\sin_\alpha \gamma = \lvert AB \rvert$	$\gamma \in \mathbb{R}; \alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\cos_\alpha \gamma = \lvert CA \rvert$	$\gamma \in \mathbb{R}; \alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\mathrm{tg}_\alpha \gamma = \lvert A'B' \rvert$	$\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{-\alpha+(k+1)\pi\}$, $\alpha+\gamma \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\mathrm{ctg}_\alpha \gamma = \lvert C'A'' \rvert$	$\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}, k \in \mathbb{Z}$



Itt $A'B' \,||\, AB$ és $A''C' \,||\, AC$.

Látható, hogy az egységsugarú kör „negyedeit" az α alapszög határozza meg. Az értelmezési tartományokat hasonló módon határozzuk meg, mint a hagyományos $\alpha = 90°$-os alapszög esetében.

A fentiek alapján, ha $\alpha, \beta, \gamma \neq 0, 180°$ és $\alpha+\beta+\gamma=180°$, akkor felírható az alábbi összefüggés:

$$\frac{c}{a} = \sin_\alpha \gamma = \frac{1}{\sin_\gamma \alpha} = \cos_\alpha \beta = \frac{1}{\cos_\gamma \beta} = \\ = \mathrm{tg}_\beta \gamma = \frac{1}{\mathrm{tg}_\beta \alpha} = \mathrm{ctg}_\beta \alpha = \frac{1}{\mathrm{ctg}_\beta \gamma}. \quad (1)$$

Megfelelően felcserélve a szögeket, még öt ilyen azonosságsort írhatunk fel, tehát összesen hatot. Ha $\alpha = 90°$, akkor visszakapjuk az ismert szögfüggvényeket.

A fent bevezetett szögfüggvények általánosabb jellegűek, mint a hagyományos 90°-os alapszögű szögfüggvények.

Az általános szögfüggvények néhány tulajdonsága

Az alapváltoztatás az alábbi módon történik: az értelmezési tartományon belül bármely α, γ, δ (itt nincs kikötve, hogy $\alpha+\gamma+\delta = 180°$) esetében:

$$\sin_\alpha \gamma = \frac{\sin_\delta \gamma}{\sin_\delta \alpha}. \quad (2)$$

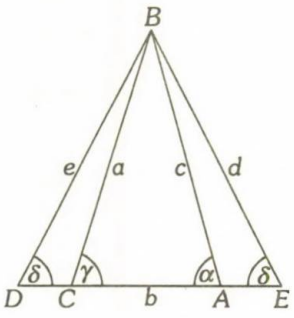
Bizonyítás:

$$\left.\begin{array}{l} \text{A } BCE_\Delta \text{ - ben: } \sin_\delta \gamma = \dfrac{d}{a} \\ \text{az } ABD_\Delta \text{ - ben: } \sin_\delta \alpha = \dfrac{e}{c} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sin_\delta \gamma}{\sin_\delta \alpha} = \frac{\frac{d}{a}}{\frac{e}{c}} = \frac{d}{a} \cdot \frac{c}{e};$$

de $d = e$, tehát

$$\frac{\sin_\delta \gamma}{\sin_\delta \alpha} = \frac{c}{a} = \sin_\alpha \gamma.$$



A $\cos_\alpha\gamma$, $\mathrm{tg}_\alpha\gamma$ és $\mathrm{ctg}_\alpha\gamma$ alapváltoztatása az (1) és (2) alapján történik. Látható, hogy egy tetszőleges általános szögfüggvény visszavezethető az ismert $\alpha = 90°$-os szögfüggvények hányadosára, felhasználva az (1)-es azonosságsorok egyikét:

$$\sin_\alpha\gamma = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} = \cos_\alpha(\gamma - \alpha)$$

és

$$\mathrm{tg}_\alpha\gamma = \frac{\sin_\alpha\gamma}{\cos_\alpha\gamma} = \frac{\sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)} = \frac{1}{\mathrm{ctg}_\alpha\gamma};$$

például:

$$\sin_{60°} 30° = \frac{\sin 30°}{\sin 60°} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Periodicitás

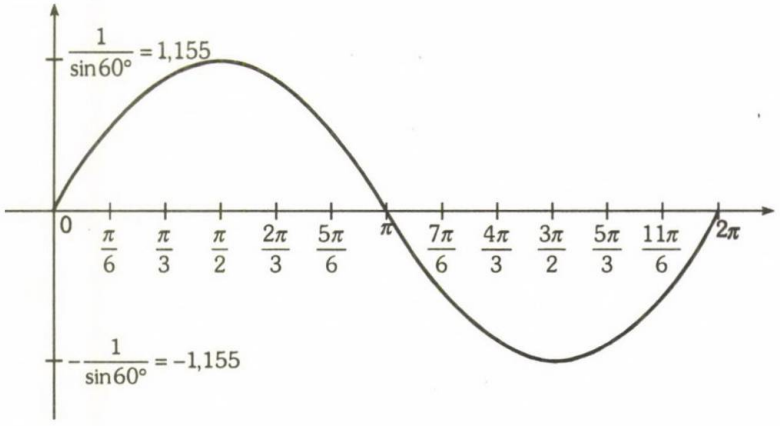
A $\sin_\alpha\gamma$ függvény periódusa $2\pi k$, tehát $\sin_\alpha\gamma = \sin_\alpha(\gamma + 2k\pi)$.

Bizonyítás:

$$\sin_\alpha(\gamma + 2k\pi) = \frac{\sin(\gamma + 2k\pi)}{\sin\alpha} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} = \sin_\alpha\gamma.$$

Hasonló módon bizonyíthatóak a következők is: $\cos_\alpha\gamma = \cos_\alpha(\gamma + 2k\pi)$; $\mathrm{tg}_\alpha\gamma = \mathrm{tg}_\alpha(\gamma + k\pi)$ és $\mathrm{ctg}_\alpha\gamma = \mathrm{ctg}_\alpha(\gamma + k\pi)$; $k \in \mathbb{Z}$.

A folytonosság, monotonitás, előjel és a grafikus képek hasonlóak a hagyományos szögfüggvényekhez, egyetlen érdekesség talán az, hogy a $\sin_\alpha\gamma$ és a $\cos_\alpha\gamma$ függvények szélsőértékei $-\frac{1}{\sin\alpha}$ és $\frac{1}{\sin\alpha}$ az alapszögtől függenek, így 1-nél nagyobb értéket is felvehetnek. Például $\alpha = 60°$ esetén a $\sin_\alpha\gamma$ függvény grafikus képe a következő:



További összefüggések

A koszinusztétel az általános Pitagorasz-tételnek felel meg, vagyis ha az $a^2 = b^2 + c^2 - 2ab\cos\alpha$ összefüggésben $\alpha = 90°$, akkor $a^2 = b^2 + c^2$. Végigosztva a fenti egyenlőséget a^2-tel az $1 = \sin^2_\gamma\gamma = \sin^2_\alpha\gamma + \cos^2_\alpha\gamma - 2\sin_\alpha\gamma \cdot \cos_\alpha\gamma \cdot \cos\alpha$ összefüggéshez jutunk.

A szinusztételből levezethetők az általános szögfüggvények és fordítva, az általános szögfüggvényekből is levezethető a szinusztétel.

Bizonyítás:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B}\\ \frac{b}{c}=\frac{\sin B}{\sin C}\\ \frac{c}{a}=\frac{\sin C}{\sin A}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{a}{b}=\sin_B A\\ \frac{b}{c}=\sin_C B\\ \frac{c}{a}=\sin_A C\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{b}{a}=\sin_A B\\ \frac{c}{b}=\sin_B C.\\ \frac{a}{c}=\sin_C A\end{cases}$$

A szinusztételből (az A, B, C, $D\neq 180°$ szögek esetén, ha $A+B+C=180°$) levezethető az $\frac{a}{\sin_D A}=\frac{b}{\sin_D B}=\frac{c}{\sin_D C}=$ $=2R\sin_{90°} D=2R\sin D$ összefüggés, ahol R a háromszög köré írt kör sugara.

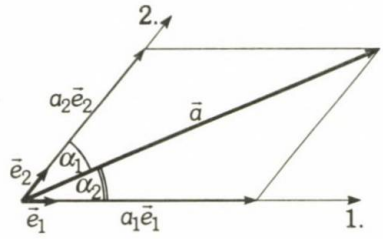
Egy $\vec{e}_1$ és $\vec{e}_2$, $|\vec{e}_1|=|\vec{e}_2|=1$ és $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)\sphericalangle=\alpha$ bázisvektorokkal rendelkező kétdimenziós $\alpha\neq 90°$, ferde szögű koordinátarendszerben, egy $\vec{a}$ vektor az alábbiak szerint írható fel: $\vec{a}=a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2$, ahol a koordináták:

$$a_1=a\cdot\cos_{\pi-\alpha}\alpha_1$$

és

$$a_2=a\cdot\cos_{\pi-\alpha}\alpha_2,$$

ha $\alpha_1+\alpha_2=\alpha$; $\cos_{\pi-\alpha}\alpha_1$, $\cos_{\pi-\alpha}\alpha_2$ az iránykoszinuszok.



Háromdimenziós esetben $\vec{a}=a_1\vec{e}_1+$ $+a_2\vec{e}_2+a_3\vec{e}_3$, ahol $|\vec{e}_1|=|\vec{e}_2|=|\vec{e}_3|=1$ és $(\vec{e}_i,\vec{e}_j)\sphericalangle=\alpha$ $(i,j=1,2,3;\ i\neq j)$.

Következtetésként megállapíthatjuk, hogy az általános szögfüggvények a hagyományos, $\alpha=90°$-os alapszögű trigonometrikus függvények tetszőleges alapszögűre való kiterjesztését, általánosítását jelentik, így általánosabb feladatok megoldására is alkalmasak.

Irodalom

[1] Hajós György: Bevezetés a geometriába. Tankönyvkiadó, Bp. 1987.

HÍREK VERSENYEKRŐL

Számválaszos verseny 1995

(Az 1995-ös Nemzetközi Matematikai Diákolimpiára válogató verseny 1. fordulója)

A versenyen semmilyen sedédeszköz nem használható. A megoldásnak csak az eredményét kell beírni a feladatot követő téglalapba. A kidolgozási idő 90 perc.

1. Melyik az a legkisebb páratlan pozitív egész, amely osztható 19-cel és 16 osztója van?

2. A T_1 és T_2 víztartályokban egyenlő magasan áll a víz; a tartályok alján levő csapokon át T_1 40 óra alatt, T_2 30 óra alatt ürül ki. Ha egyszerre nyitjuk ki a két csapot, hány óra múlva lesz T_1-ben kétszer olyan magas a vízállás, mint T_2-ben?

3. Egy autóbusz 30 perc alatt teszi meg a végállomások közti utat, közben nem áll meg. A végállomásokról kétpercenként indítanak buszokat. Az egyikről egy busszal egyidőben indul egy autó a busz sebességének a négysze-

resével. A vele egyszerre induló busszal együtt hány buszt előz meg az autó a végállomásig?

4. Az O középpontú kör köré egy $ABCD$ érintőnégyszöget írunk. Hány fokos az $AOB\sphericalangle + COD\sphericalangle$?

5. Hányféleképpen lehet sorba rakni 11 fekete és 8 fehér golyót úgy, hogy két fehér ne kerüljön egymás mellé?

6. Az a, b, c, d pozitív számokra $abcd = 1$ teljesül. Mekkora az

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + ac + ad + bc + bd + cd$$

minimuma?

7. A háromszög a, b, c oldalaira $0 < a \le 1 \le b \le 2 \le c \le 3$ teljesül. Mekkora lehet maximálisan a területe?

8. Kijelöljük egy kör két pontját és mellékjük 1-eseket írunk. A két pont a körvonalon két ívet határoz meg. Megfelezzük ezt a két körívet, és a felezőpontokhoz az ívek végpontjaiban levő számok összegét írjuk. Majd megfelezzük az így nyert 4 körívet, és minden felezőponthoz hozzáírjuk az ívük két végpontjában levő számok összegét. Ezt folytatva, a 100-adik felezés után a kör mellé írt számok összege legyen S. Mekkora S prímtényezős felbontásában a legnagyobb kitevő?

9. Hányféleképpen juthatunk el a négyzetrács $O(0, 0)$ pontjából a $V(4, 4)$ pontjába, ha mindig csak rácsegyeneseken haladhatunk „jobbra" vagy „felfelé"?

10. Sorban felírjuk az egészeket 1-től egymillióig. A következő sorban minden szám alá írjuk számjegyeinek az összegét, és így tovább. Mennyi a negyedik sorban levő 1-esek és 2-esek számának különbsége?

11. Az $ax + by + cz = 0$, $bx + cy + az = 0$, $cx + ay + bz = 0$ egyenletrendszernek van a $(0, 0, 0)$-tól különböző megoldása. Mennyivel egyenlő $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$?

12. Egy háromszög belső P pontjának a csúcsoktól mért távolságösszege 12, az oldalaktól mért távolságösszege 6. Mekkora a háromszög kerületének a négyzete?

13. Az ABC szabályos háromszög AB ill. BC oldalát egy AC-vel párhuzamos egyenes a P ill. Q pontban metszi; AQ felezőpontja E, a PBQ háromszög középpontja D. Hány fokos a DEC háromszög legkisebb szöge?

14. A szabályos n-szög leghosszabb és legrövidebb átlójának a különbsége a sokszög oldalával egyenlő. Mekkora az n?

15. a és b olyan pozitív egészek, amelyekre $\frac{a^3+1}{ab-1}$ is egész. Mekkora $a + b$ maximuma?

A helyes válaszok sorra: 1995, 24, 12, 180, 495, 10, 1, 100, 70, 1, 0, 432, 30, 9, 8.

A feladatokat *Reiman István* állította össze.

Matematika felvételi feladatok

8. osztályosoknak a budapesti Berzsenyi Dániel Gimnáziumban, 1995. február

Olasz tagozaton

1. Ha kettesével állnak sorba a tanulók, egynek nem lesz párja. Ha hármasával, akkor az utolsó sorban két gyerek lesz. Hány tanuló jut az utolsó sorba, ha hatosával állnak fel?

2. Két hordóban ugyanolyan almalé van, összesen 220 liter. Az egyik hordóban a lé értéke 8500 Ft, a másikban 10 200 Ft. Hány liter van az egyes hordókban?

3. Kati tegnap az első boltban elköltötte a zsebpénze 50 %-át, majd a fagyizóban maradék pénze $\frac{3}{5}$-ét. Szomorúan tapasztalta, hogy már csak 20 Ft-ja maradt. Mennyi zsebpénzt kapott?

Angol-német tagozaton

1. Hány számjegyet írtak le egy 400 oldalas könyv oldalainak számozásakor, ha a számozást a 3. oldalon kezdték?

2. Hány éves Rita, ha 10 év múlva hatszor annyi idős lesz, mint 10 évvel ezelőtt volt?

3. Egy 70 cm mély tó szélén kikötő-cölöpöt vernek le. A cölöp $\frac{3}{5}$-e mélyül az iszapba, 20 %-a látszik ki a vízből. Milyen hosszú a cölöp?

Humán tagozaton

1. Hányat üt az óra egy nap 24 órájában, ha minden órában annyit üt, ahány órát mutat (13 órától ismét egy ütéssel kezd)?

2. Jancsi 6 tábla csokoládét és 5 csomag cukrot vett 705 Ft-ért. Jóska két ugyanolyan csokoládét és 10 ugyanolyan csomag cukrot vett 610 Ft-ért. Mennyibe kerül egy csomag cukor és egy tábla csokoládé?

3. Kilenc egyforma füzet kevesebbe kerül, mint 1000 Ft, de tíz ilyen füzet többe kerül, mint 1100 Ft. Mennyibe kerülhet egy ilyen füzet?

Matematika felvételi feladatok

8. osztályosoknak a budapesti Fazekas Mihály Gimnáziumban, 1995. február

Angol tagozat

1. Egy szám 15 %-ához $\frac{9}{5}$-öt hozzáadtunk, s így a szám 18 %-át kaptuk. Melyik ez a szám?

2. $A = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7$; $B = 180$.

a) A-t B-vel osztva mennyi a maradék?

b) Melyik az a legnagyobb négyzetszám, amivel osztható A?

3. Milyen pozitív egész számok a megoldásai a következő egyenlőtlenségnek?

$$2 - \frac{x+1}{3} \leq 1 - \frac{1}{2}(x-4).$$

4. Egy szabályos ötszög egy csúcsából kiinduló két átlója az ötszöget három háromszögre bontja. Mekkorák e háromszögek szögei?

5. Döntsd el, hogy igazak-e a következő állítások!

a) Minden rombusz deltoid.

b) Ha egy négyszög deltoid is és rombusz is, akkor e négyszög négyzet.

c) Van olyan trapéz, amelyiknek van szimmetriacentruma.

d) Van konkáv deltoid.

Válaszaidat indokold!

6. Egy háromjegyű szám jegyeinek összege 9. A jegyek között kettő megegyezik. Ha a számjegyeket fordított sorrendben írjuk le, s az így kapott háromjegyű számot kivonjuk az eredetiből, akkor 27-tel osztható, háromjegyű számot kapunk. Mi lehet az eredeti szám?

Biológia tagozat

1. A $P(-1; 2)$ pontot tükröztük az origóra. Ábrázoljuk a koordináta-rendszerben P-t és P tükörképét (P')! Írjuk fel két olyan pont koordinátáit, mely pontok rajta vannak a PP' egyenesen!

2. Döntsd el, hogy igazak-e a következő állítások!

a) Az olyan háromszög, amelyben a szögek aránya 2 : 3 : 6 tompaszögű.

b) Van olyan háromszög, melyben az oldalak aránya 2 : 3 : 6.

c) Van olyan háromszög, melyet az egyik magassága két egyenlő szárú háromszögre vág szét.

Válaszaidat indokold!

3. Milyen természetes szám lehet x, ha

$$\frac{2}{5} < \frac{3}{x} < \frac{4}{5}?$$

4. Egy téglalap két oldalának különbsége 2 cm. E téglalappal egyenlő kerületű négyzet területe kisebb vagy nagyobb, mint a téglalap területe? Mennyi e két terület különbsége?

5. A hatos lottón az 1-től 45-ig levő számok közül hat számot kell megjelölni. Egy szelvényen a bejelölt hat szám közül a legkisebb egy egyjegyű prímszám volt, s két négyzetszám is volt közöttük. A hat szám egy mértani sorozat egymás utáni tagjai. Hány prímszám volt a bejelölt számok között? Hány ilyen számhatos van?

Országos matematika felmérő dolgozat '94

3. (természettudományos) osztály
(Svédország)

Megoldási idő 225 perc.

A dolgozat 10 feladatból áll, melyekre teljes értékű megoldásokat kell kidolgozni.

1-5. feladat: Minden helyesen megoldott feladat két pontot ér. Csupán az eredmény feltüntetéséért 0 pont jár.

6-10. feladat: Minden helyesen megoldott feladat három pontot ér. Csupán az eredmény feltüntetéséért 0 pont jár.

A jelölésekhez fűzz magyarázatot és a felállított egyenleteket indokold.

Az érvelések egyenletmegoldások, és számítások érthetőek legyenek.

A megoldásokhoz szükséges ábrákat vonalzóval és körzővel érthetően, korrekt külalakkal kell elkészíteni.

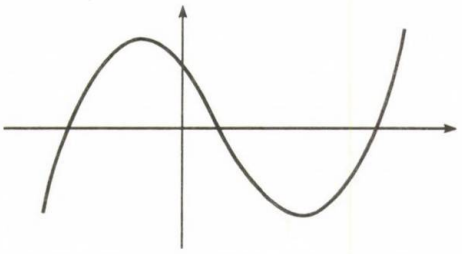
Segédeszközként függvénytáblázat és zsebszámológép használható.

Kétpontos feladatok

Az első 5 feladatnál elérhető maximális pontszám 2 pont feladatonként. A feladatok teljes megoldását fel kell tüntetni.

1. Egy egyenes körhenger alakú tartály átmérője 8,4 m, magassága 2,9 m. A tartály lefestéséhez használt festékből 1 liter 6,5 m^2-re elég. Hány liter festékre van szükség a tartály palástjának lefestéséhez?

2. Határozd meg pontosan az $y = x^3 - 3x^2 - 6x + 9$ görbe helyi maximumpontjának x koordinátáját! (Közelítő érték kiszámítása 0 pontot jelent.)



3. Határozd meg az $y = \sin ax - \cos x$ görbe érintőjének egyenletét az $x = 0$ pontban!

4. Oldd meg a következő egyenletet $\ln(x + 1) = 2\ln x$! Add meg a pontos értékét! (Közelítő érték kiszámítása nem elegendő.)

5. A következő táblázat egy növekvő függvény ismert értékeit tartalmazza.

x	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00
$f(x)$	1,30	1,40	1,60	1,90	2,30

Bizonyítsd be, hogy $3 < \int_1^3 f(x)dx < 4$.

Hárompontos feladatok

A következő öt feladatnál elérhető maximum pontszám 3 pont feladatonként. A feladatok teljes megoldását fel kell tüntetni.

6. Egy téglalap területe 687 m^2, kerülete 135 m. A téglalap egyik oldala x m. Egy egyenlet segítségével számold ki a téglalap oldalainak hosszúságát!

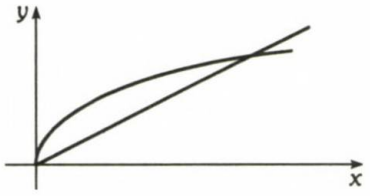
7. Egy 88 m² területű háromszög egyik szöge 75°, egy másik 65°. Számold ki a háromszög leghosszabb oldalának hosszúságát!

8. Egy sütőbe helyezett étel hőmérséklete y °C, melyet a következő függvény határoz meg

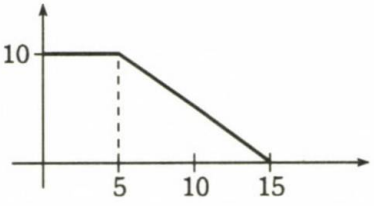
$$y = 200 - 180e^{-kx},$$

ahol x perc az az idő, ameddig a sütőben volt az étel. Az étel hőmérséklete a sütőbe helyezéskor percenként 2,0 °C-kal emelkedik (ennyi az emelkedés sebessége). Mennyi lesz az étel hőmérséklete 24 perc múlva?

9. Határozd meg annak a forgástestnek a térfogatát, amely akkor keletkezik, amikor az $y = \sqrt{x}$ és $y = \frac{x}{2}$ függvények által határolt terület az y tengely körül forog. Teljes pontszám eléréséhez pontos válasz szükséges.



10. Egy nagy víztartályba egy csövön keresztül folyik a víz, t perc időpontnál a tartály $f(t)$ liter vizet tartalmaz. Amikor $t = 0$-val, üres a tartály. Az ábra a víz áramlásának sebességét ábrázolja a $0 \le t \le 15$ intervallumban. A sebesség állandó $10 \frac{1}{\text{perc}}$ a $0 \le t \le 5$ intervallumban, hogy ezután lineárisan 0-ig csökkenjen, amikor $t = 15$-tel. Határozd meg az f függvényt!



Az 1994/95. tanévi matematika feladatmegoldó pontverseny III. fordulójában kitűzött feladatok megoldása

A feladatok szövege az 1995/1. szám 26. oldalán olvasható.

95.1. Jelölje a nagyobb számot a, a kisebbet b! Tudjuk, hogy

$$a - \frac{b}{3} > \frac{2}{3}b,$$

tehát a feltétel szerint

$$a - \frac{b}{3} = 4 \cdot \frac{2}{3}b = \frac{8}{3}b,$$

azaz

$$a = \frac{9}{3}b = 3b,$$

tehát a nagyobb szám 3-szor akkora, mint a kisebb.

95.2. Mivel 900 háromjegyű szám van, és közülük minden második páratlan, a háromjegyű páratlan számok száma 450. Úgy képzelhetjük, hogy kétszer írjuk le a háromjegyű páratlan számok összegét: egyszer növekvő, egyszer csökkenő sorrendben:

$$101 + 103 + 105 + \ldots + 997 + 999,$$
$$999 + 997 + 995 + \ldots + 103 + 101.$$

Könnyű észrevenni, hogy az egymás alatt álló számok összege minden esetben 1100, tehát a háromjegyű páratlan számok összege:

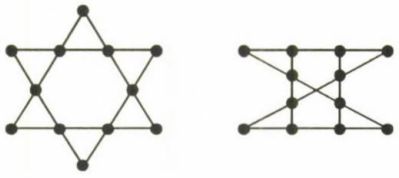
$$\frac{1100 \cdot 450}{2} = 247500.$$

Teljesen hasonló módszerrel számolható ki a tízjegyű páratlan számok összege. Tízjegyű szám 9000000000 van, így ezek közül 4500000000 a páratlan. Az első tízjegyű páratlan szám 1000000001, az utolsó 9999999999, ezek összege 11000000000. Így az előző gondolatmenethez hasonlóan a keresett összeg:

$$11000000000 \cdot 2250000000 = \\ = 24750000000000000000,$$

egy húszjegyű szám.

95.3. A következő két ábrán két megoldást adunk a pontok elhelyezésére. A megoldók bizonyára további szép elrendezéseket is találtak.



95.4. Ha sorra vesszük a kétjegyű számokat, akkor egy jó darabig egy vagy két lépés után, hamar kapunk palindrom számot. A 11, vagy 22 stb. számok esetén akár azt is mondhatjuk, hogy nulla lépést kell végezni, de itt is végezhetünk több lépést is. Az 59-nél tapasztaljuk először, hogy három lépésre van szükség, amíg az 1111 palindromszámhoz érünk. Ezután a 69 esetében 4 lépés vezet el a 4884-hez, a 79 esetében már 6 lépés kell, míg a 44044 palindromszámhoz érünk.

Meglepetés a 89 esetén ér bennünket. Itt sokáig kell számolnunk, míg végül a 24. lépés után a 8813200023188 13 jegyű számhoz érünk. Ha a 99-ből is továbblépünk (bár maga a szám is palindromszám), akkor is 6 lépés után a 79497 számhoz jutunk.

Érdekes megjegyezni, hogy nyitott kérdés, bármely (nemcsak kétjegyű, hanem akárhányjegyű) számból kiindulva véges sok lépés után palindromszámot kapunk-e?

95.5. Hamar észre lehet venni, hogy $34 = \frac{102}{3}$, $334 = \frac{1002}{3}$, $3334 = \frac{10002}{3}$. Az általános esetben tehát nézzük annak a számnak a négyzetét, amely n jegyű és az utolsó jegye 4, a többi 3. Ez így írható:

$$\frac{10^n + 2}{3}.$$

A négyzete:

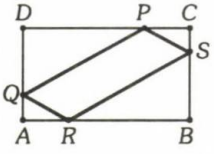
$$\left(\frac{10^n + 2}{3}\right)^2 = \frac{(10^n + 2)^2}{9} = \frac{10^{2n} + 4 \cdot 10^n + 4}{9}.$$

Az eredményt így is írhatjuk:

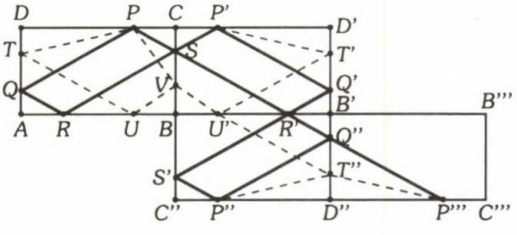
$$\frac{10^{2n} - 1 + 4(10^n - 1) + 9}{9} = \\ = \frac{10^{2n} - 1}{9} + 4 \cdot \frac{10^n - 1}{9} + 1.$$

Mivel $10^{2n} - 1$ egy csupa 9-es számjegyből álló $2n$ jegyű szám és $10^n - 1$ ugyanilyen n jegyű szám, az összeg olyan $2n$ jegyű szám, amelynek első n jegye 1, a további $n - 1$ jegye 5 és az utolsó számjegye 6.

95.6. Megmutatjuk, hogy a következő $PQRSP$ út a legrövidebb, ahol $PQ \| AC$, $QR \| BD$, $RS \| AC$ és $SP \| BD$.



Tükrözzük az $ABCD$ téglalapot először a BC oldalra, majd a kapott tükörképet a BA' oldalra, végül az így kapott tükörképet a $D''B'$ oldalra.



A tükrözések miatt a PP''' szakasz éppen a $PQRSP$ töröttvonal hosszával egyenlő. Ugyanakkor bármely más, például a $PTÙVP$ útvonal hosszabb, mert ez egyenlő a P-t P'''-

vel összekötő $PVÙ'T''P'''$ töröttvonallal, ami hosszabb, mint az egyenes szakasz.

95.7. Figyeljük meg jól a számtáblázat felépítését és írjuk fel általában az n-edik oszlopban álló k-adik számot!

4,	7,	10,	13,	16,	19,	22, ...
7,	12,	17,	22,	27,	32,	37, ...
10,	17,	24,	31,	38,	45,	52, ...
13,	22,	31,	40,	49,	58,	67, ...
16,	27,	38,	49,	60,	71,	82, ...
19,	32,	45,	58,	71,	84,	97, ...
22,	37,	52,	67,	82,	97,	112, ...
...						

Az 1. sor n-edik eleme ($n = 1, 2, ...$) $3n + 1$, a 2. sor n-edik eleme $5n + 2$, a 3. sor n-edik eleme $7n + 3$, a 4. sor n-edik eleme $9n + 4$; általában a k-adik sor n-edik eleme: $(2k + 1)n + k = 2kn + n + k$.

Ezek szerint, ha feltesszük, hogy egy a szám szerepel a táblázatban, mondjuk a k-adik sor n-edik eleme, akkor

$$2a + 1 = 4kn + 2n + 2k + 1 = \\ = (2k + 1)(2n + 1)$$

összetett szám, hiszen felbontható két, 1-nél nagyobb szám szorzatára ($n, k \geq 1$).
Ezzel az *a)* állítást igazoltuk.

A *b)* állítás bizonyításához elég megmutatni, hogy ha $2a + 1$ összetett szám ($a \geq 1$, egész), akkor a szerepel a táblázatban.

Tegyük fel tehát, hogy $2a + 1$ összetett szám. Mivel páratlan, ez azt jelenti, hogy felbontható két, 1-nél nagyobb páratlan szám szorzatára:

$$2a + 1 = (2k + 1)(2n + 1) = \\ = 4kn + 2n + 2k + 1.$$

Ekkor tehát

$$a = 2kn + k + n = (2k + 1)n + k,$$

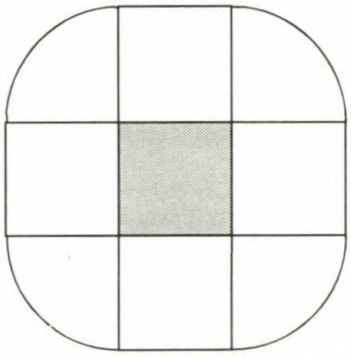
ami azt jelenti, hogy a éppen a k-adik sor n-edik eleme a táblázatban.

Ha tehát a nem szerepel a táblázatban, akkor $2a + 1$ csak prímszám lehet!

95.8. A megoldást azon az úton érhetjük el legkönnyebben, ha kiszámítjuk, legfeljebb mekkora a téglalap területének az a része, ahova nem tehetjük le az egységsugarú kör középpontját.

Először is világos, hogy a téglalap oldalaihoz 1 egységnél közelebb nem kerülhet a középpont. A téglalap kerületéhez belülről „tapadó" 1 egység szélességű „csík" területe $2 \cdot 20 + 2 \cdot 8 = 56$ területegység.

Másrészt minden egységnégyzet köré kell rajzolni egy 1 szélességű sávot az ábrán látható módon:



Egy ilyen „sáv" 4 egységnégyzetből és 4 egységsugarú negyedkörből áll, így területe (a belső négyzettel együtt):

$$5 + \pi \cdot 1^2 = 5 + \pi.$$

Összesen tehát

$$56 + 16(5 + \pi) = 136 + 16\pi.$$

A téglalap alakú lemez területe 200 területegység, így még marad

$$200 - (136 + 16\pi) = 64 - 16\pi = 16(4 - \pi) > 0$$

területegység. Így tehát valóban elhelyezhetünk még legalább egy egységsugarú körlemezt a kívánt módon.

Feladatrovat tanároknak

Az olvasók és feladatmegoldók nevében is köszönet illeti *Pogáts Ferenc* főiskolai docens munkáját, aki a lap elődjénél és az új lapban történő indulása óta gondozta a tanároknak szánt feladatrovatot. Munkáját a matematika és annak tanítása iránti elkötelezettség jellemezte.

Egyben örömmel tudatjuk, hogy a rovat további gondozását *Kosztolányi József*, a szegedi József Attila Tudományegyetem Bolyai Intézetének fiatal oktatója vállalta. Munkájához sok örömet és sok sikert kívánunk.

A főszerkesztő

Rovatvezető: **Kosztolányi József**

A megoldásokat kérjük a rovatvezető címére küldeni: 6721 Szeged, Pusztaszeri u. 17. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljük. Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak a megoldásait is) külön lapra írják tollal vagy írógéppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsák össze, és külső felére írják rá a feladat számát és a megoldó nevét! Csatoljanak a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat a kitűzést követő negyedik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük. **Beküldési határidő:** *1995. július 31.*

43. Adott a síkban n darab pont. Az ezek által meghatározott egyenesek adta metszéspontok között legfeljebb hány olyan van, amely az adott pontoktól különbözik?

Mészáros József, Galánta

44. A $p < q < r$ prímeket hármasikreknek nevezzük, ha $q - p$ és az $r - q$ különbségek 2-nél nem nagyobbak. Hány hármasikerprím van?

Ambrus Gabriella, Budapest

45. Legyen $a_n = \sum_{k=1}^{n} (8k + 17)$. Hány négyzetszám van az (a_n) sorozatban?

46. Egy 3×3-as *bűvös* négyzet elemei különböző pozitív egészek. Bármely sor vagy oszlop három elemének a szorzata megegyezik. Legalább mekkora a táblázat legnagyobb eleme?

Blázsik Zoltán, Szeged

47. Az azonos körüljárású, közös belső pont nélküli OAB, DOC és EFO háromszögek hasonlók (a megfelelő csúcsokat azonos sorrendben soroltuk fel). Bizonyítsuk be, hogy a BC, DE és FA szakaszok felezőpontjai az adottakhoz hasonló háromszög csúcsai!

András Szilárd, Csíkszereda

48. Az ABC háromszög köré írt körnek az AB és az AC oldalakhoz írt körökkel való hatványvonalai (a közös húrok egyenesei) merőlegesek egymásra. Mekkora a $CAB\sphericalangle$?

Kiss Sándor, Szatmárnémeti

Feladatmegoldások (25-30. feladatok)

25. Legyen H egy n elemű halmaz, melynek hatványhalmazát (H részhalmazainak halmazát) jelölje $P(H)$! Hány olyan (A, B) halmazpár van, amelyre

$$A \in P(H),\ B \in P(H) \text{ és } A \subseteq B$$

teljesül?

Megoldás: Amikor egy (A, B) halmazpárt akarunk H részhalmazaiból kiválasztani úgy, hogy $A \subseteq B$ legyen, akkor ezt megtehetjük oly módon, hogy H minden eleméről eldöntjük

a) benne legyen mindkét halmazban;
b) csak a B eleme legyen;
c) egyik halmazban se legyen.

Így ilyen (A, B) párt 3^n-féleképpen választhatunk ki.

Blázsik Zoltán, Szeged

A megoldók száma: 12.

26. Van-e olyan p és q pozitív egész, amelyekre az

$$1992^p + 2 \text{ és } 1992^q + 3$$

négyzetszámok?

(Kiss Sándor, Szatmárnémeti)

Megoldás: Mindkét esetre nemleges a válasz. Ugyanis az 1992 a 12-nek többszöröse lévén az első számot 3-mal, a másodikat 4-gyel osztva a maradék 2 illetve 3, márpedig négyzetszám – mint azt könnyen beláthatjuk – osztási maradéka esetünkben csak a 0 vagy az 1 lehetne.

Mészáros József, Galánta
Tóth Sándor, Sárospatak

A megoldók száma: 13.

27. Igazoljuk, hogy végtelen sok természetes egész megoldása van a

$$\sqrt[3]{x - y\sqrt{z}} + \sqrt[3]{x + y\sqrt{z}} = 1994$$

egyenletnek!

(Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely)

Megoldás: Legyen $z = 1$, $x - y = a^3$, $x + y = b^3$. E választásra $x = \frac{a^3 + b^3}{2}$, $y = \frac{b^3 - a^3}{2}$. Ha a és b olyan egészek, amelyekre $a + b = 1994$, úgy könnyen látható, hogy x és y is egészek. Minden $a < 0$ egész számhoz létezik olyan pozitív egész b, amelyre $a + b = 1994$, és ezekkel x és y egyaránt pozitív egész. Ennélfogva az $\left(\frac{a^3 + b^3}{2}, \frac{b^3 - a^3}{2}, 1\right)$ természetes számokból álló számhármas megoldás, azaz eredeti egyenletünknek végtelen sok pozitív egész megoldása van.

Csorba Ferenc, Győr

A megoldók száma: 9.

28. Hány olyan háromszög van, amelyre igaz, hogy oldalainak hosszát egész szám méri, és a leghosszabb oldal m egységnyi?

(Ambrus Gabriella, Budapest)

Megoldás: Jelölje a másik két oldal hosszát a ill. b. Ekkor

$$m < a + b \le 2m, \quad 1 \le a \le m \text{ és } 1 \le b \le m.$$

Ha $a = 1$, akkor $b = m$ lehet csak. Ha $1 \le a = k \le m$, akkor b felvehet minden $m - k + 1$ és m közötti értéket, azaz k darab megfelelő háromszög létezik. E számokat összegezve $\frac{m(m+1)}{2}$ háromszöget kaptunk, de $a \neq b$ esetében kétszer, míg $a = b$ esetében csak egyszer számoltuk össze őket. Az egyenlő szárú háromszögek $(a = b)$ száma páros m-re $\frac{m}{2}$, míg páratlan m esetén $\frac{m+1}{2}$. A feltett kérdésre tehát válaszunk:
páros m-re

$$\frac{\frac{m(m+1)}{2} + \frac{m}{2}}{2} = \frac{m(m+2)}{4},$$

páratlan m-re

$$\frac{\frac{m(m+1)}{2} + \frac{m+1}{2}}{2} = \left(\frac{m+1}{2}\right)^2,$$

vagyis $\left[\left(\frac{m+1}{2}\right)^2\right]$ számú háromszög van.

Csorba Ferenc, Győr

A megoldók száma: 13.

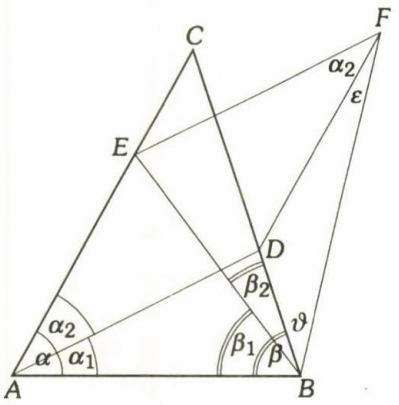
29. Az $ABC_\triangle$ BC oldalán a D, az AC oldalán az E pont olyan, hogy

$$AD = BE,$$

és

$$\frac{BAD\sphericalangle}{DAC\sphericalangle} = \frac{ABE\sphericalangle}{EBC\sphericalangle}.$$

Bizonyítsa be, hogy $CA = CB$!



Megoldás: Az ábra jelölései alapján legyen $AD \# EF$. Így az $ADFE$ paralelogrammában

a) $EFD\sphericalangle = \alpha_2$.

Az $\alpha_1 = k\alpha_2$ és $\beta_1 = k\beta_2$ feltételből, ha $\alpha < \beta$, úgy

b) $\alpha_1 + \alpha_2 = (k+1)\alpha_2 < \beta_1 + \beta_2 = (k+1)\beta_2$,

azaz

c) $\alpha_2 < \beta_2$.

A BEF_Δ egyenlő szárú, hiszen $BE = AD = EF$, így

d) $\beta_2 + \delta = \alpha_2 + \varepsilon$, amiből *c)* miatt

e) $\delta < \varepsilon$, tehát

f) $FD < BD$.

Az ABD_Δ és ABE_Δ-ben 2-2 oldal egyenlő és az ezek által közrefogott szögekre $\alpha_1 < \beta_1$ a *c)*-ből következően, így a harmadik oldal abban a nagyobb, amelyben a közrefogott szög, azaz

$$DB < AE = FD,$$

ami ellentmond az *f)*-nek.

Hasonlóan ellentmondásra vezet az $\alpha > \beta$ feltevés, tehát $\alpha = \beta$, és ezért $CA = CB$.

Tóth Sándor, Sárospatak
Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

A megoldók száma: 7.

30. Igazoljuk, hogy a *pitagoraszi számhármasok* között mindig van kettő olyan, amelyeknek összege vagy a különbsége a 7-nek többszöröse!

(Bencze Mihály, Brassó)

Megoldás: Bármely egész 7-es maradéka 0, ±1, ±2, ±3 lehet, így egy négyzetszám 7-es maradéka 0, 1, 4 vagy 2. Legyen (a, b, c) pitagoraszi számhármas, melyre $a^2 + b^2 = c^2$.
Ha a vagy b valamelyike 7-nek többszöröse, akkor c^2 és b^2 különbsége 7-tel osztható, és $c^2 - b^2 = (c+b)(c-b)$ miatt a tényezők egyike 7-nek többszöröse.
Ha a és b egyike sem osztható 7-tel, akkor a négyzetes maradékok csak $1 + 1 = 2$ megoldást engedik meg, s ennélfogva $7 \mid a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$, vagyis ez esetben is igaz a feladat állítása.

András Szilárd, Csíkszereda

A megoldók száma: 14.

A megoldók névsora: Ambrus Gabriella, Budapest (26-30.); András Szilárd, Csíkszereda (25., 26-30. 2-2 mód); Barta László, Benczúrfalva (25-30.); Bíró Bálint, Eger (26., 30.); Blázsik Zoltán, Szeged (25. 2 mód, 26., 28., 29.); Csete Lajos, Markotabödöge (25., 26., 28., 30.); Csorba Ferenc, Győr (25-28., 30.); Horváth Géza, Zselíz (25., 28., 30.); Kocsis Orsolya, Szolnok (25-28., 30.); Mészáros József, Galánta (25-28., 30.); Prahovean Cornel, Brassó (25., 26., 28., 30.); Simon József, Csíkszereda (25-30.); Tóth Sándor, Sárospatak (25-29., 30. 2 mód); Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely (25., 26., 27. 2 mód, 28-30.); Ványa István, Szeged (30.).

KÖNYVISMERTETÉS

Palánkainé Jakab Ágnes - Dr. Szederkényi Antalné

Jól felkészültem-e? Matematikai feladatsorok 5 és 6. osztályosoknak

Ezen füzetek tartalmilag és szerkezetileg illeszkednek a MOZAIK Oktatási Stúdió már eddig megjelent hasonló című munkáihoz. Felépítésében igazodik a jelenleg használatos tankönyvek témaköreihez:

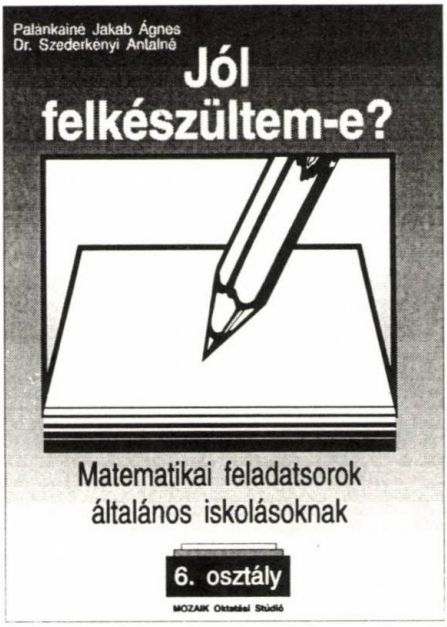
5. osztály

A természetes számok
Geometriai alakzatok
Az egész számok
Adott tulajdonságú ponthalmazok
A törtek
A szögek és mérésük
A tizedes törtek

6. osztály

Számok, műveletek
Geometriai alakzatok vizsgálata
Racionális számok szorzása, osztása
Egyenes és fordított arányosság
Tengelyes tükrözés
A természetes számok világa
Egyenletek, egyenlőtlenségek

Ez a könyv segítőtársa lehet azoknak a tanulóknak, akik önállóan szeretnék a tudásukat megerősíteni. Az egymást követő feladatok végigvezetik őket a tananyagon. Ha munkájuk során segítségre szorulnak, megtalálják azt a „Megoldások" részben. A megoldások az életkori sajátosságoknak megfelelően részletesek és a matematikai formulákat, lejegyzési módokat is tartalmazzák. Az egyes témaköröket követő „Ellenőrző feladatok" megoldása **jól felkészíti** a könyv használóját arra, hogy biztos tudásra építhesse további matematikai ismereteit!



Könyvajánlat

Palánkainé Jakab Ágnes -
Dr. Szederkényi Antalné

Jól felkészültem-e?
Matematikai feladatsorok
5 és 6. osztályosoknak

Ezen füzetek tartalmilag és szerkezetileg illeszkednek a MOZAIK Oktatási Stúdió már eddig megjelent hasonló című munkáihoz. Felépítésében igazodik a jelenleg használatos tankönyvek témaköreihez:

5. osztály:
A természetes számok
Geometriai alakzatok
Az egész számok
Adott tulajdonságú ponthalmazok
A törtek
A szögek és mérésük
A tizedes törtek

6. osztály:
Számok, műveletek
Geometriai alakzatok vizsgálata
Racionális számok szorzása, osztása
Egyenes és fordított arányosság
Tengelyes tükrözés
A természetes számok világa
Egyenletek, egyenlőtlenségek

Ez a könyv segítőtársa lehet azoknak a tanulóknak, akik önállóan szeretnék a tudásukat megerősíteni. Az egymást követő feladatok végigvezetik őket a tananyagon. Ha munkájuk során segítségre szorulnak, megtalálják azt a „Megoldások" részben. A megoldások az életkori sajátosságoknak megfelelően részletesek és a matematikai formulákat, lejegyzési módokat is tartalmazzák. Az egyes témaköröket követő „Ellenőrző feladatok" megoldása **jól felkészíti** a könyv használóját arra, hogy biztos tudásra építhesse további matematikai ismereteit!

Megjelenik 1995. november

Rójóné Oláh Erika - Gera Tibor

Matek tesztkönyv

A könyvben közölt tesztek felhasználását egy-egy téma összefoglalása, év végi ismétlés, a IV. osztályos rendszerező összefoglalás és az érettségire illetve a felvételire való felkészülés részeként ajánljuk. A könyv úgy épül fel, hogy használhassák diákok az önálló tanuláshoz, tanárok a hagyományostól eltérő számonkéréshez és a differenciált tanórai foglalkoztatáshoz. Tartalmazza a feladatok megoldását, a feladatsorok megoldókulcsát, és a feladatok megoldásához szükséges legfontosabb ismereteket.

A feladatokat úgy állítottuk össze, hogy megoldásukhoz ne kelljen bonyolult és hosszadalmas számításokat végezni. A szükséges mellékszámításokat a diákok külön papíron végezhetik (ezt az értékelésnél nem kell figyelembe venni), a megoldásokat pedig megoldólapra írják, így a javítás gyors és egyszerű. A tesztekhez javasolt megoldólapot mellékeljük.

Megjelent ára: 498,- Ft

imosoft

MOZAIK

A matematika TANÍTÁSA

995. SZEPTEMBER ára: 90,- Ft III. évf. / 4. szám

VÁRSÉNYI KÖNYVTÁR

TARTALOM

A PARABOLA PARABOLÁJA, AVAGY A PARABOLA MINT JELKÉP ÉS PÉLDABESZÉD (ELEMI KÖRKÉP A DINAMIKUS RENDSZEREKRŐL) II.
Dr. Benkő József, Pécs - Brassó

HÚRCSOKROK AZ EGYSÉGSUGARÚ KÖRBEN II.
Tálas Csaba - Uhrin János, Békéscsaba

AZ 1995. ÉVI BEKE MANÓ EMLÉKDÍJASOK

HÍREK VERSENYEKRŐL

AZ 1994/95. TANÉVI FELADATMEGOLDÓ VERSENY ÉRTÉKELÉSE
Vincze István - Kain Mihály, Szeged

FELADATROVAT TANÁROKNAK

PÁLYÁZATI FELHÍVÁS DIÁKOKNAK ÉS TANÁROKNAK

A Bolyai János Matematikai Társulat Békéscsabán, július 4-7-ig rendezte meg az ez évi Rátz László Vándorgyűlést. Az ünnepélyes megnyitó immár hagyományos eseménye volt az 1995. évi Beke Manó Emlékdíjak átadása. Ebben az évben 11 díjat osztottak ki, ... *(12. oldal)*

A versenyt 1995. március 31-től április 4-ig Pakson az Energetikai Szakképzési Intézetben rendezték meg. A házigazdák, elsősorban dr. Gálos István igazgató, valamint Árokszállási Tibor és Árokszállási Eszter tanárok, a szakmai szervezők ideális körülményeket biztosítottak... *(16. oldal)*

A MOZAIK Oktatási Stúdió az 1994/95-ös tanévben is megrendezte a 4 fordulós feladatmegoldó versenyét. Az 5-6. osztályosok között 68, a 7-8. osztályosok között 60 tanuló nevezett be. (Ez utóbbi csoportban néhányan a párkányi magyar iskola tanulói voltak.) *(23. oldal)*

MÓDSZERTANI FOLYÓIRAT

A MATEMATIKA TANÍTÁSA
módszertani folyóirat

Szerkesztőség:
Főszerkesztő: Dr. Urbán János
Szerkesztőség címe:
6723 Szeged, Debreceni u. 3.
Tel.: (62) 312-988,
FAX: (62) 328-247

Kiadó:
MOZAIK Oktatási Stúdió Kft.
Felelős kiadó: Török Zoltánné
Műszaki szerkesztő:
Vassné Németh Katalin
Tördelő szerk.: Kovács Attila
Borítóterv: Magyar Csaba

Megrendelhető:
MOZAIK Oktatási Stúdió
6701 Szeged, Pf. 301.
Éves előfizetési díj: 450 Ft

A lap megvásárolható a MOZAIK Könyvesboltokban:
Szeged, Csongrádi sgt. 73.
Budapest VIII., Üllői út 70.

Megjelent a Művelődési és Közoktatási Minisztérium támogatásával.

A matematika tanításában megjelenő valamennyi cikket szerzői jog védi. Másolásuk bármilyen formában kizárólag a kiadó előzetes írásbeli engedélyével történhet.

ISSN 1216-6650

Készült a Dürer Nyomda Kft-ben
Felelős vezető: Székely András

TARTALOM

A PARABOLA PARABOLÁJA, AVAGY A PARABOLA MINT JELKÉP ÉS PÉLDABESZÉD (ELEMI KÖRKÉP A DINAMIKUS RENDSZEREKRŐL) II.
Dr. Benkő József, Pécs - Brassó

HÚRCSOKROK AZ EGYSÉGSUGARÚ KÖRBEN II.
Tálas Csaba - Uhrin János, Békéscsaba

AZ 1995. ÉVI BEKE MANÓ EMLÉKDÍJASOK

HÍREK VERSENYEKRŐL

AZ 1994/95. TANÉVI FELADATMEGOLDÓ VERSENY ÉRTÉKELÉSE
Vincze István - Kain Mihály, Szeged

FELADATROVAT TANÁROKNAK

PÁLYÁZATI FELHÍVÁS DIÁKOKNAK ÉS TANÁROKNAK

Közlési feltételek:

A közlésre szánt kéziratokat gépelve két példányban vagy floppy lemezen küldjék meg a szerkesztőség címére. A kéziratok lehetőleg ne haladják meg a 6-8 gépelt oldalt (oldalanként 30 sorban 66 leütés).

A rajzokat, ábrákat, táblázatokat és fényképeket külön lapon megfelelő szövegezéssel kérjük ellátni. (A szövegrészben pedig zárójelben utaljunk rá.)

Kérjük, hogy a szövegbeli idézések név és évszám jelöléssel történjenek, míg a tanulmányok végén a felsorolt irodalmak alfabetikus sorrendben készüljenek.

Kérjük szerzőtársainkat, hogy a kéziratok beküldésével egyidejűleg szíveskedjenek közölni pontos címüket, munkahelyüket és beosztásukat, a megjelent cikkek utáni honorárium kifizetése érdekében személyi számukat. A cikk megjelenése után a lemezeket visszaküldjük.

Benkő József

A parabola parabolája, avagy a parabola mint jelkép és példabeszéd (Elemi körkép a dinamikus rendszerekről) II.

8. A rendszer szimbolikus leírása $\alpha > 4$-re

Az f_α függvény maximuma $f_\alpha\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\alpha}{4}$, tehát $\alpha \leq 4$-re: $f_\alpha[0, 1] \subset [0, 1]$ és következésképpen mindegyik $x \in [0, 1]$ pályája $[0, 1]$-ben van. Amikor α meghaladja 4-et, ez a tulajdonság egyetemességét veszti és csak bizonyos $x \in [0, 1]$ pontokra igaz az, hogy $\Theta_{f_\alpha}(x) \subset [0, 1]$. Ezek halmazát jelöljük C_α-val!

$$C_\alpha := \left\{ x \in [0, 1] \,\middle|\, \Theta_{f_\alpha}(x) \subset [0, 1] \right\}.$$

Rögtön adódik, hogy $x \in C_\alpha$-ra több is igaz, éspedig: $\Theta_{f_\alpha}(x) \subset C_\alpha$. Ez utóbbi alapján a $\left\{ \Theta_{f_\alpha}(x) \,\middle|\, x \in C_\alpha \right\}$ pályák elemzésére elég, ha vesszük f_α-nak C_α-ra való leszűkítését, azaz képezzük a $h_\alpha := f_\alpha \,|\, C_\alpha : C_\alpha \to C_\alpha$ dinamikus rendszert. Erről fogjuk kideríteni, hogy egy jól meghatározott értelemben kaotikusan viselkedik. E célból segédeszközként bevezetjük az $[\{0, 1\}^{\mathbb{N}}, \sigma]$ úgynevezett **szimbolikus dinamikai rendszert**, ahol a $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$-nel jelölt alaphalmaz az összes $\{0, 1\}$-értékű sorozat (azaz $s \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ azt jelenti, hogy $s: \mathbb{N} \to \{0, 1\}$, vagy a gyakoribb indexes jelöléssel $s = (s_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ahol $s_n \in \{0, 1\}$ az s-nek n-ben vett értéke, a $\sigma: \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \to \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ leképezés pedig a

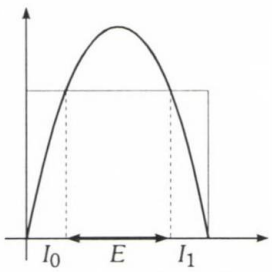
$$\sigma((s_0, s_1, \ldots, s_n, \ldots)) = (s_1, s_2, \ldots, s_{n+1}, \ldots)$$

képlettel értelmezett, úgynevezett <<shift>> (csúsztatási, eltolási) operátor).

A két rendszer közt a kapcsolatot a következőképpen állíthatjuk fel. Jelöljük E-vel azon x pontok halmazát, amelyekre $f_\alpha(x) = \alpha \cdot x(1 - x) > 1$, azaz

$$E = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha - 4}{\alpha}}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha - 4}{\alpha}} \right),$$

és legyen $I_0 = \left[0, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha - 4}{\alpha}} \right]$ ill. $I_1 = \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha - 4}{\alpha}}, 1 \right]$. Mivel az $x \in E$ pontokra $f_\alpha(x) > 1$, majd $0 > f_\alpha^2(x) > f_\alpha^3(x) >$ és $\lim_{n \to \infty} f_\alpha^n(x) = -\infty$, ezért minden olyan $x \in [0, 1]$ esetén, melyre valamely $k \in \mathbb{N}$-re $f_\alpha^k(x) \in E$, az következik, hogy $\lim_{n \to \infty} f_\alpha^n(x) = -\infty$.



Innen adódik, hogy $x \in [0, 1]$ akkor és csakis akkor van C_α-ban, ha minden $n \in \mathbb{N}$-re $f_\alpha^n(x) \in I_0 \amalg I_1$. Következésképp minden n-re jól meghatározott az az $s_n(x) \in \{0, 1\}$ szám, amelyre $f_\alpha^n(x) \in I_{s_n(x)}$. Minden $x \in C_\alpha$-ra így megszerkesztett $s(x) := (s_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ sorozattal értelmezzük az $s: C_\alpha \to \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ leképezést, s rajta keresztül kötjük össze a $[C_\alpha, h_\alpha]$ és

$\left[\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \sigma\right]$ dinamikus rendszereket a következő módon.

TÉTEL: Bármely $x \in C_\alpha$-ra és $n \in \mathbb{N}$-re $s_n(f_\alpha(x)) = I_{n+1}(x)$, tehát a

$$\begin{array}{ccc} C_\alpha & \xrightarrow{h_\alpha} & C_\alpha \\ \downarrow s & & \downarrow s \\ \{0,1\}^{\mathbb{N}} & \xrightarrow{\sigma} & \{0,1\}^{\mathbb{N}} \end{array}$$

diagram kommutatív, azaz $S \circ h_\alpha = \sigma \circ S$.

Általánosabban: $S \circ h_\alpha = \sigma^n \circ S$ bármely $n \in \mathbb{N}$-re, s ennek következtében $S(\Theta_h(x)) = \Theta_\sigma(S(x))$.

BIZONYÍTÁS: A $(s_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat értelmezése szerint: $f_\alpha^{n+1}(x) \in I_{s_{n+1}(x)}$, $f_\alpha^{n+1}(x) = f_\alpha^n(f_\alpha(x)) \in I_{s_n(f(x))}$, tehát az egyértelműség alapján $s_{n+1}(x) = s_n(f(x))$. Ezek után $S \circ h_\alpha(x) = S(f_\alpha(x)) = s_n(f_\alpha(x))_{n\in\mathbb{N}} = (s_{n+1}(x))_{n\in\mathbb{N}}$, míg $\sigma \circ S(x) = \sigma(S(x)) = \sigma(s_n(x))_{n\in\mathbb{N}} = (s_{n+1}(x))_{n\in\mathbb{N}}$, azaz az állításban szereplő egyenlőség. Az általános eset indukcióval igazolható: $S \circ h^{n+1} = (S \circ h^n) \circ h = (\sigma^n \circ S) \circ h = \sigma^n \circ (S \circ h) = \sigma^n \circ (\sigma \circ S) = \sigma^{n+1} \circ S$.

Ebből a pályákra vonatkozó állítás mindjárt következik. A periodikus pontokra vonatkozó részt pedig így indokoljuk meg: $h^n(x) = x$ esetén $S(x) = S(h^n(x)) = (S \circ h^n)(x) = (\sigma^n \circ S)(x) = \sigma^n(S(x))$, azaz $S(x)$ σ-nak periodikus pontja.

MEGJEGYZÉSEK: A tételben leírt helyzetben lévő dinamikus rendszereket konjugált pároknak mondjuk. Ha a konjugálást megvalósító S leképezés bijektív, akkor rajta keresztül az egyik rendszer tulajdonságai átvihetők a másikra (erről többet és pontosabbat alább!).

A C_α valamint az S leképezés elemzésére minden $(s_0, s_1, \ldots, s_n) \in \{0, 1\}^{n+1}$ sorozathoz hozzárendelünk egy $I_{s_0 s_1 \ldots s_n}$ halmazt a következő módon:

$$I_{s_0 s_1 \ldots s_n} := \left\{ x \in [0,1] \,\middle|\, f_\alpha^k(x) \in I_{s_k}, k = 0, 1, \ldots, n \right\}.$$

LEMMA: (i) $I_{s_0 s_1 \ldots s_n} = I_{s_0} \cap f_\alpha^{-1}(I_{s_1 \ldots s_n})$ és következésképpen mindegyik $I_{s_0 \ldots s_n}$ zárt intervallum.

(ii) Minden $s = (s_0, s_1, \ldots, s_n, \ldots) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ sorozatra $I_{s_0} \supset I_{s_0 s_1} \supset \ldots \supset I_{s_0 s_1 \ldots s_n} \supset \ldots$ és keresztmetszetük $I(s) := \bigcap_{n=0}^{\infty} I_{s_0 s_1 \ldots s_n}$ egyetlen pontból áll.

(iii) $C_\alpha = \left\{ I(s) \,\middle|\, s \in [0,1]^{\mathbb{N}} \right\}$ és következésképpen az $s \to I(s)$ hozzárendeléssel definiált $I: \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to C_\alpha$ leképezés $S: C_\alpha \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ inverze.

(iv) Bármely $n \in \mathbb{N}$-re $C_\alpha \subset \coprod \left\{ I_{s_0 s_1 \ldots s_n} \,\middle|\, (s_0 s_1 \ldots s_1) \in \{0,1\}^{n+1} \right\}$.

BIZONYÍTÁSOK: (i)

$x \in I_{s_0 s_1 \ldots s_n} \Leftrightarrow f_\alpha^k(x) \in I_{s_k}$, $k = 0, 1, \ldots, n$

$\Leftrightarrow (x \in I_{s_0}) \wedge (f_\alpha^{k-1}(f_\alpha(x)) \in I_{s_k}, k = 1, \ldots, n)$

$\Leftrightarrow (x \in I_{s_0}) \wedge (f_\alpha(x) \in I_{s_1 \ldots s_n})$

$\Leftrightarrow x \in I_{s_0} \cap f^{-1}(I_{s_1 \ldots s_n})$.

Definíció szerint I_0 és I_1 zárt intervallumok, tehát f_α folytonossága miatt $f_\alpha^{-1}(I_{s_0})$ is zárt $(s = 0, 1)$. A képlet alapján $I_{s_1 \ldots s_n}$ zártságából $I_{s_0 s_1 \ldots s_n}$ zártsága következik. Már csak azt kell belátnunk, hogy ha $J \subset I_0 \coprod I_1$ intervallum, akkor $I_{s_0} \cap f_\alpha^{-1}(J)$ $(s = 0, 1)$ úgyszintén az.

Ha (például) $J \subset I_0$, akkor $f_\alpha^{-1}(J) = \left(f_\alpha \,\middle|\, I_0\right)^{-1}(J)$, s mivel $f_\alpha \,\middle|\, I_0$ szigorúan növekvő, ezért inverzálható, s inverz függvénye is folytonos, azaz $f_\alpha^{-1}(J)$ egy folytonos függvénynek J-n vett értékeivel egyenlő, az pedig (a közbülső érték tétel alapján) intervallumot képez.

(ii) Az intervallumsorozat csökkenése a definícióból következik, hiszen a hosszabb sorozatra plusz kikötéseket tartalmaz. A Cantor-féle egymásba skatulyázott zárt intervallumokra vonatkozó tétel értelmében $I(s)$ zárt intervallum. Azt, hogy csak egy pontot tartalmaz, az

alábbiakban fogjuk tárgyalni. Most még csak azt jegyezzük meg, hogy ha $s, t \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ különböző elemek, akkor $I(s) \cap I(t) = \varnothing$.

Valóban, ha létezne $x \in I(s) \cap I(t)$, akkor e halmazok definíciója szerint minden $n \in \mathbb{N}$-re: $x \in I_{s_0 \dots s_n} \cap I_{t_0 \dots t_n}$, tehát $f_{i\alpha}^n(x) \in I_{s_n} \cap I_{t_n}$. Innen pedig $s_n = t_n$ következne minden n-re, azaz s és t egyenlősége.

(iii) Ha $x \in C_{i\alpha}$, akkor minden $n \in \mathbb{N}$-re $f_{i\alpha}^n(x) \in I_{s_n(x)}$, tehát $x \in I_{s_0(x) \dots s_n(x)}$, s ebből $x \in I(s(x))$. Ha majd igazolt lesz, hogy az $I(s)$ halmazok csak egy pontot tartalmaznak, akkor az előbbi reláció $I(s(x)) = x$ formát ölti, igazolva az $I \circ S = \mathrm{id}_{C_{i\alpha}}$ egyenlőséget.

Megfordítva: ha $x \in I(s)$ (pontosabban $I(s) = \{x\}$), akkor minden $n \in \mathbb{N}$-re $x \in I_{s_0 \dots s_n}$, tehát $f_{i\alpha}^n(x) \in I_{s_n}$, azaz $\Theta_{f_{i\alpha}}(x) \subset [0,1]$ és $x \in C_{i\alpha}$. Egyben az is következik, hogy $s_n = s_n(x)$, azaz $s = s(x)$. Behelyettesítve az $x = I(s)$-t, azt kapjuk, hogy $s = s(I(s))$, azaz $s \circ I = \mathrm{id}_{\{0,1\}^{\mathbb{N}}}$. Ezzel igazoltuk, hogy s és I egymás inverzei.

(iv) A bennfoglaltatás világos, mert $x \in C_{i\alpha}$-ra az összes $f_{i\alpha}^n(x) \in I_0 \coprod I_1$, tehát bármilyen (nagy) n-re: $x \in I_{s_0(x) \dots s_n(x)}$. Másrészt pedig s definíciója szerint, ha $x \in I_{s_0 \dots s_n}$, akkor $s_k = s_k(x)$, $k = 0, 1, \dots, n$. Ha tehát $x \in I_{s_0 \dots s_n} \cap I_{t_0 \dots t_n}$, akkor $(s_0 \dots s_n) = (t_0 \dots t_n) = (s_0(x) \dots s_n(x))$ igazolva az egyesítés diszjunktságát.

MEGJEGYZÉS: Az $I(s)$ halmazokról kimutattuk, hogy zárt intervallumok, de adósak maradtunk annak igazolásával, hogy csak egyetlen pontot tartalmaznak. Ez a tulajdonságuk igen fontos, hiszen erre alapozva igazoltuk, hogy s bijektív, tehát a $[C_{i\alpha}, h_{i\alpha}]$ és $[\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \sigma]$ konjugált pár. Sajnos elemi módszereinkkel az állítást csak $\alpha > 2 + \sqrt{5}$-re tudjuk bizonyítani. A következő szakasznak ez az egyik fontos mondanivalója.

9. Metrikus becslések $\alpha > 2 + \sqrt{5}$ estén

A szóban forgó küszöbszám azt biztosítja, hogy $f_{i\alpha}'(x) > 1$, minden $x \in I_0 \coprod I_1$-re. Valóban, mivel $f_{i\alpha}'$ $\frac{1}{2}$-re nézve szimmetrikus és I_0-on szigorúan csökken, csak azt kell biztosítanunk, hogy I_0 jobb végpontján nagyobb 1-nél, azaz $f_{i\alpha}'\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha-4}{\alpha}}\right) = \sqrt{\alpha(\alpha-4)} > 1$, s ez utóbbi $\alpha > 2 + \sqrt{5}$-tel egyenértékű.

LEMMA. Ha $\alpha > 4$ és $J \subset [0,1]$ intervallum, akkor $i = 0$, 1-re $I_i \cap f_{i\alpha}^{-1}(J)$ úgyszintén az, s az abszolút értékkel jelzett hosszakra fennáll az alábbi becslés:

$$\frac{1}{\alpha}|J| \le \left|I_i \cap f_{i\alpha}^{-1}(J)\right| \le \frac{1}{\sqrt{\alpha(\alpha-4)}}|J|.$$

BIZONYÍTÁS: Már az előző szakaszban láttuk, hogy a szóban forgó halmaz nem más, mint a J intervallum képe a (szigorúan monoton és folytonos) $g_i = \left(f \mid I_i\right)^{-1}$ inverz függvényre nézve. Ha tehát $J = [a, b]$, akkor $g_0(J) = [g_0(a), g_0(b)]$, (mert g_0 növekvő), tehát

$$\left|I_0 \cap f_{i\alpha}^{-1}(J)\right| = \left|g_0(J)\right| = g_0(b) - g_0(a) =$$

$$= g_0'(c)(b-a) = \frac{1}{f_{i\alpha}'(g_0(c))}|J| \begin{cases} \le \dfrac{1}{\sqrt{\alpha(\alpha-4)}}|J| \\ \ge \dfrac{1}{\alpha}|J| \end{cases}.$$

(A véges növekedés tétele mellett felhasználtuk az inverz függvény deriválási szabályát, valamint azt, hogy $f_{i\alpha}'$ I_0-on csökkenő.)

TÉTEL: Ha $\alpha > 2 + \sqrt{5}$, akkor

(i) tetszőleges $(s_0, \dots, s_n) \in \{0,1\}^{n+1}$-re $\left|I_{s_0 s_1 \dots s_n}\right| \le \dfrac{1}{(\alpha(\alpha-4))\frac{1}{2}}$, s ebből kifolyólag bármely $s \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$-re $I(s)$ egyetlen pontot tartalmaz.

(ii) $C_{i\alpha}$ nem tartalmaz egyetlen valódi intervallumot sem.

(iii) Ha $(s_0, \dots, s_n) \neq (t_0, \dots, t_n)$ és $x \in I_{s_0 \dots s_n}$, $y \in I_{t_0 \dots t_n}$, akkor $|x-y| \geq \frac{1}{\alpha^{n-1}} \sqrt{\frac{\alpha-4}{\alpha}}$.

BIZONYÍTÁS: (i) Az előző szakaszban igazolt $I_{s_0 \dots s_n} = I_{s_0} \cap f_\alpha^{-1}(I_{s_1 \dots s_n})$, valamint a fenti becslés ismételt felhasználásával: $|I_{s_0 \dots s_n}| =$

$$= \left|I_{s_0} \cap f_\alpha^{-1}(I_{s_1 \dots s_n})\right| \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha(\alpha-4)}} |I_{s_1 \dots s_n}| \leq \dots \leq$$

$$\frac{1}{\alpha(\alpha-4)\frac{n}{2}} \cdot |I_{s_n}| \leq \frac{1}{\alpha(\alpha-4)\frac{n}{2}}.$$

Mivel $I(s) = \bigcap_{n=0}^{\infty} I_{s_0 \dots s_n}$, ezért $I(s) \subset I_{s_0 \dots s_n}$ minden n-re, tehát $|I(s)| \leq |I_{s_0 \dots s_n}| \leq$

$$\leq \frac{1}{\alpha(\alpha-4)\frac{n}{2}}.$$

Mivel $\alpha(\alpha-4) > 1$, a jobb oldal ($n \to \infty$-re) nullához tart, tehát $|I(s)| = 0$.

(ii) Ha $[a, b] \subset C_\alpha$, akkor az előző paragrafus lemmájának (iv) állítása szerint minden n-re létezik olyan $(s_0 \dots s_n) \in \{0,1\}^{n+1}$, hogy $[a, b] \subset I_{s_0 \dots s_n}$, tehát a fenti becslés szerint $0 \leq b-a \leq \frac{1}{\alpha(\alpha-4)\frac{n}{2}}$, majd határátmenettel $a = b$ következik.

(iii) Az $E = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha-4}{\alpha}}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha-4}{\alpha}}\right)$ halmazzal indulva megszerkesztjük az $E_i = I_i \cap f_\alpha^{-1}(E)$ ($i = 0, 1$) nyílt intervallumokat, majd rekurzíven, minden $(s_0 \dots s_n) \in \{0,1\}^{n+1}$-re az $E_{s_0 \dots s_n} := I_{s_0} \cap f_\alpha^{-1}(E_{s_1 \dots s_n})$ nyílt intervallumokat. A lemma alsó becslése alapján

$$|E_{s_0 \dots s_n}| \geq \frac{1}{\alpha} |E_{s_1 \dots s_n}| \geq \dots \geq \frac{1}{\alpha^{n+2}} |E| =$$

$$= \frac{1}{\alpha^{n+1}} \sqrt{\frac{\alpha-4}{\alpha}}.$$

Az így értelmezett halmazok jelentésére a következő (indukcióval könnyen igazolható) egyenlőség derít fényt:

$$E_{s_0 \dots s_n} =$$

$$\left\{x \,\middle|\, x \in I_{s_0} \wedge f_\alpha(x) \in I_{s_1} \wedge \dots \wedge f_\alpha^n(x) \in I_{s_n} \wedge f_\alpha^{n+1}(x) \in E\right\}$$

$$= I_{s_0 \dots s_n} \cap f_\alpha^{-(n+1)}(E),$$

tehát x első n iteráltja az $(s_0 \dots s_n)$ menetrend szerint bolyong $I_0 \amalg I_1$-ben, majd az $(n+1)$-edik lépésben átmegy E-be, innen pedig $(1, \infty)$-be, majd negatív csökkenő értékekkel eltávolodik a $(-\infty)$-be. Mivel az $I_{s_0 \dots s_n}$ halmazok kettőnként diszjunktak, ezért az $E_{s_0 \dots s_n}$-ek is azok, egyesítésük $E^{n+1} =$

$$= \coprod \left\{E_{s_0 \dots s_n} \,\middle|\, (s_0 \dots s_n) \in \{0,1\}^{n+1}\right\} =$$

$$\left\{x \,\middle|\, f_\alpha^k(x) \in [0,1]\ (k = 0, 1, \dots, n+1) \wedge f_\alpha^{n+2}(x) \notin [0,1]\right\}$$

pedig nem más, mint azok az $x \in [0,1]$ pontok, amelyek az $(n+2)$-edik lépésben hagyják el a $[0, 1]$-et. Innen következik, hogy $n \neq m$-re $E^n \cap E^m \neq \emptyset$ és $E \amalg E^1 \amalg \dots \amalg E^{n-1}$ azoknak az $x \in [0,1]$ pontoknak a halmaza, amelyekre létezik olyan $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, hogy $f_\alpha^k(x) \in E$, azaz bármely $(s_0 \dots s_n)$-re $x \notin I_{s_0 \dots s_n}$. Ez azt jelenti, hogy

$$[0, 1] =$$

$$E \amalg E^1 \amalg \dots \amalg E^{n-1} \amalg \coprod \left\{I_{s_0 \dots s_n} \,\middle|\, (s_0 \dots s_n) \in \{0,1\}^{n+1}\right\},$$

tehát az E-k egyesítésében szereplő $1 + 2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$ nyílt intervallumok eltávolításával $[0, 1]$-ből megmarad a 2^n darab $I_{s_0 \dots s_n}$ zárt intervallum. Következik, hogy bármely két $I_{s_0 \dots s_n}$ és $I_{t_0 \dots t_n}$ közt van legalább egy $E_{r_0 \dots r_m}$ ($m \leq n-1$) típusú halmaz, ezért ha $x \in I_{s_0 \dots s_n}$ és $y \in I_{t_0 \dots t_n}$, akkor

$$|x-y| \geq |E_{r_0 \dots r_m}| \geq \frac{1}{\alpha^{m+1}} \sqrt{\frac{\alpha-4}{\alpha}} \geq$$

$$\geq \frac{1}{\alpha^{n-1}} \sqrt{\frac{\alpha-4}{\alpha}}.$$

10. A szimbolikus dinamikai rendszer sajátos tulajdonságai

Kezdetben *megbeszéltük* a periodikus pontok kérdését. E célból minden $(s_0, \dots, s_{n-1}) \in \{0,1\}^n$-re bevezetjük az

$$\overline{(s_0 \dots s_{n-1})} := (s_0 s_1 \dots s_{n-1}, s_0 s_1 \dots s_{n-1}, \dots) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$$

jelölést, amit az adott elem n-periódusú meghosszabbításának nevezünk, hiszen a „shift" operátor n-szeri alkalmazásával önmagába tér vissza: $\sigma^n(\overline{s_0 \dots s_{n-1}}) = \overline{(s_0 \dots s_{n-1})}$. Minden periodikus pont ilyen alakú.

LEMMA. Ha $\sigma^n(s_0 \dots s_{n-1} s_n \dots) = (s_0 \dots s_{n-1} \dots)$, akkor $(s_0 \dots s_{n-1} s_n \dots) = \overline{(s_0 \dots s_{n-1})}$, tehát $\mathrm{Per}_1(\sigma^n) = \left\{ \overline{(s_0 \dots s_{n-1})} \,\middle|\, (s_0 \dots s_{n-1}) \in \{0,1\}^n \right\}$ pontosan 2^n elemet tartalmaz, és következésképpen bármely n-re: $\mathrm{Per}_n(\sigma) \geq 2^n - 2^{\left[\frac{n}{2}\right]} \geq 2$.

BIZONYÍTÁS: Ha $s = (s_0 \dots s_{n-1} s_n \dots)$ teljesíti a $\sigma^n(s) = s$ egyenlőséget, akkor bármely $k \in \mathbb{N}$-re is $\sigma^{kn}(s) = s$, tehát tetszőleges $m = kn + r$, $r \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ esetén $s_{kn+r} = s_k$, azaz $s = \left(\overline{s_0 s_1 \dots s_{n-1}}\right)$. A végső állítás abból adódik, hogy $\mathrm{Per}_1(\sigma^n) = \coprod_{m|n} \mathrm{Per}_m(\sigma)$, és $\mathrm{Per}_m(\sigma) \subset \mathrm{Per}_1(\sigma^m)$, tehát számosságra térve

$$2^n = \left|\mathrm{Per}_1(\sigma^n)\right| = \sum_{r m|n} \left|\mathrm{Per}_m(\sigma)\right| =$$

$$= \left|\mathrm{Per}_n(\sigma)\right| + \sum_{\substack{m|n \\ m<n}} \left|\mathrm{Per}(\sigma)\right| \leq \left|\mathrm{Per}_n(\sigma)\right| +$$

$$+ \sum_{\substack{m|n \\ m<n}} 2^m \leq \left|\mathrm{Per}_n(\sigma)\right| + (2 + 2^2 + \dots + 2^{\left[\frac{n}{2}\right]}) \leq$$

$$\leq \mathrm{Per}_n(\sigma) + 2^{\left[\frac{n}{2}\right]}.$$

A továbbiakban vesszük a $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$-en a

$$d(s,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} |s_n - t_n|$$

$$(s = (s_n)_{n \in \mathbb{N}},\ t = (t_n)_{n \in \mathbb{N}})$$

képlettel értelmezett metrikát. Belátható, ha $s_0 = t_0$, ..., $s_n = t_n$, akkor $d(s,t) \leq \frac{1}{2^n}$, míg $d(s,t) < \frac{1}{2^n}$ esetén $s_0 = t_0$, ..., $s_n = t_n$. Ezzel a metrikával felruházott $\left[\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \sigma, d\right]$ metrikus dinamikai rendszer alaptulajdonságait tartalmazza az alábbi tétel.

TÉTEL: (i) $d(\sigma(s), \sigma(t)) < 2d(s,t)$, tehát σ folytonos.

(ii) Bármely $t \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ és $\varepsilon > 0$ párra létezik olyan periodikus $s \in \mathrm{Per}(\sigma)$, hogy $d(s,t) < \varepsilon$; a *periodikus ponthalmaz, sűrű a* $[\{0,1\}^{\mathbb{N}}, d]$ metrikus térben.

(iii) Tetszőleges két pont $s, t \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ és $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ számra létezik olyan $s' \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ és $n \in \mathbb{N}$, hogy $d(s,s') < \varepsilon$ és $d(\sigma^n(s), t) < \delta$. Ezt a tulajdonságot nevezzük a *rendszer topologikus tranzitivitásának*.

(iv) Létezik egy $r > 0$ úgy, hogy a tetszőlegesen választott két $s, t \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ megfelelő $n \in \mathbb{N}$-re kielégíti a $d(\sigma^n(s), \sigma^n(t)) \geq r$ egyenlőtlenséget. Ezt a tulajdonságot a *rendszer érzékenységének* nevezzük.

(v) Létezik egy olyan sajátos $s^* \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, amelynek pályája sűrű a térben, azaz bármely $s \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ és $\varepsilon > 0$ párra van olyan $m \in \mathbb{N}$, hogy $d(\sigma^n(s^*), s) < \varepsilon$.

MEGJEGYZÉSEK: A tranzitivitás miatt a rendszer felbonthatatlan két nyílt, diszjunkt, σ-ra nézve invariáns halmaz egyesítésére. A rendszer érzékenysége a hosszú távú előrejelzések lehetőségét gyakorlatilag kizárja (mert a gyakorlatban – beleértve a számításainkat is – az adatok pontatlanok, a reális s helyett egy bármilyen közeli, de tőle különböző t-vel dolgozunk), s a bennük szereplő „hibák" az iterációk folytán az adatok nagyságrendjére nőhetnek fel). Ezen meggondolások alapján egy olyan metrikus dinamikai rendszert, amelyben

a periodikus pontok sűrűk, s a rendszer topologikusan tranzitív és érzékeny, *khaotikus dinamikai rendszernek* mondjuk, tehát a tétel alapján a szimbolikus dinamikai rendszer ebben az értelemben kaotikus (a vele konjugált $[C_\alpha, h_\alpha]$ úgyszintén az, a részleteket lásd alább).

Megjegyzendő, hogy a kaotikusság fent megadott három ismérve közt több átfedés is van (nem függetlenek), de ezek részletezésére nem térünk ki, hiszen célunk nem a kaotikus rendszerek szabatos értelmezése (ennek több módja is van), hanem a tárgyalt konkrét rendszereink bonyolult viselkedésének leírása. (Az érdeklődő olvasó ezzel kapcsolatos információkat az American Mathematical Monthly (99 (1992), 332-334, 865.o. 101 (1994) 353-355. o.) cikkeiben találhat.)

BIZONYÍTÁSOK:

(i) $d(\sigma(s), \sigma(t)) = |s_1 - t_1| + \frac{|s_2 - t_2|}{2} + \ldots =$

$= 2\left(|s_0 - t_0| + \frac{|s_1 - t_1|}{2} + \ldots\right) - 2|s_0 - t_0| \le$

$\le 2d(s, t)$.

(ii) Válasszuk n-et úgy, hogy $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ és legyen $s := \overline{(t_0, t_1, \ldots, t_n)} \in \mathrm{Per}(\sigma)$! Ekkor s és t az első $n+1$ pozícióban megegyeznek, távolságuk tehát $\le \frac{1}{2^n}$.

(iv) Mivel $s \neq t$, van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $s_n \neq t_n$. Ekkor $d(\sigma^n(s), \sigma^n(t)) =$

$= d((s_n, s_{n+1}, \ldots)(t_n, t_{n+1}, \ldots)) = |s_n - t_n| +$

$+ \frac{1}{2}|s_{n+1} - t_{n+1}| + \ldots \ge |s_n - t_n| = 1$, tehát $r = 1$ kielégíti (iv)-t.

(v) Az $s^* \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$-et úgy választjuk, hogy benne szerepeljen bármely véges {0, 1} sorozat. Ezt úgy érhetjük el, hogy (például) először felsoroljuk az 1 hosszúságú sorozatokat, majd a 2 hosszúságúakat és így tovább, tehát

$s^* = (0, 1 | 00, 01, 10, 11 | 000, 001, 010, 100, 011, 101, 110, 111 | \ldots)$.

Adott $s = (s_0 \ldots s_n \ldots)$ és $\varepsilon > 0$ esetén vegyük n-et úgy, hogy $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$, majd s^*-ban keressük meg azt a részt, ahol $(s_0 s_1 \ldots s_n)$ szerepel! Ha $s_0 = s^*_m$, $s_1 = s^*_{m+1}$, ..., $s_n = s^*_{m+n}$, akkor $\sigma^m(s^k) = (s_0 s_1 \ldots s_n, s^*_{m+n+1} \ldots)$ és mivel az első $n+1$ inverze megegyezik s-sel, ezért $d(\sigma^m(s^*), s) = \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \left|s^k_{m+n+1} - s_{n+1}\right| + \ldots \le$

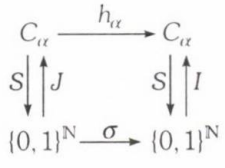
$\le \frac{1}{2^n} < \varepsilon$.

(iii) Az (v) alapján van olyan m, hogy $d(\sigma^m(s^*), s) < \varepsilon$. Legyen $s' = \sigma^m(s^*)$! Válasszunk most egy olyan k számot, hogy egyrészt $\frac{1}{2^k} < \delta$, másrészt pedig $m < 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 +$

$+ \ldots + k \cdot 2^k$ legyen. Mivel a jobb oldalon álló szám azoknak a pozícióknak a számát jelenti, amelyeket s^*-ban elfoglalnak az összes $(k+1)$-nél rövidebb {0, 1} sorozatok, ezért a $(t_0, t_1, \ldots, t_k)$ sorozat helye s^*-ban az m-edik pozíció után kezdődik. Legyen tehát $n \in \mathbb{N}$ az az index, amelyre $s^k_{m+n} = t_0$, $s^k_{m+n+1} = t_1$, ..., $s^k_{m+n+k} = t_k$. Ekkor $\sigma^{m+n}(s^*)$ első $k+1$ tagja megegyezik a t-évl, tehát $d(\sigma^{m+n}(s^*), t) \le \frac{1}{2}$, azaz $d(\sigma^m(s'), t) < \delta$.

11. A $[C_\alpha, h_\alpha]$ kaotikus jellege $\alpha > 2 + \sqrt{5}$-re

A



konjugálási diagram alapján a szimbolikus rendszerre már bizonyított tulajdonságokat átvisszük a $[C_\alpha, h_\alpha]$ rendszerre. Az algebrai tulajdonságokat már a 8-as szakaszban megvizsgáltuk. A metrikához kötöttek átvitelére először az S, I leképezések egyenletes folytonosságáról győződünk meg.

LEMMA. (i) Tetszőleges $\varepsilon > 0$-ra létezik olyan $\delta_\varepsilon > 0$, hogy bármely $x, y \in C_\alpha$-ra: $|x - y| < \delta_\varepsilon$ maga után vonja a $d(S(x), S(y)) < \varepsilon$ egyenlőtlenséget.

(ii) Hasonlóan I-re: tetszőleges $\varepsilon > 0$ van olyan $\eta_\varepsilon > 0$, hogy bármely $s, t \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$-re ha $d(s,t) < \eta_\varepsilon$, akkor $|I(s) - I(t)| < \varepsilon$.

BIZONYÍTÁSOK: (i) Legyen $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $\frac{1}{2^{n_\varepsilon}} < \varepsilon$ és $\delta_\varepsilon = \frac{1}{\alpha^{n_\varepsilon - 1}} \sqrt{\frac{\alpha - 4}{\alpha}}$! Ha $x, y \in C_\alpha$ és $|x - y| < \delta_\varepsilon$, akkor a 9. paragrafus tételének (iii) pontja szerint x és y ugyanahhoz az $I_{s_0 \ldots s_n}$-hez kell tartozzon, tehát $s_k(x) = s_k = s_k(y)$, $k = 0, 1, \ldots, n_\varepsilon$. Mivel az $S(x)$ és $S(y)$ sorozatok az első $n_\varepsilon + 1$ pozícióban megegyeznek, ezért távolságuk $d(S(x), S(y)) < \frac{1}{2^{n_\varepsilon}} < \varepsilon$.

(ii) Mivel C_α kompakt és az S bijekció folytonos, ezért inverze, az I úgyszintén folytonos (ez az elemi topológia egy jól ismert tétele). Ezek után az előző paragrafus tétele gond nélkül átvihető $[C_\alpha, h_\alpha]$-ra.

TÉTEL: (i) C_α-ban a $\mathrm{Per}(h_\alpha)$ pontok sűrűn helyezkednek el, azaz bármely $x \in C_\alpha$ és $\varepsilon > 0$ párosra létezik olyan $p \in \mathrm{Per}(h_\alpha)$ pont, hogy $|x - p| < \varepsilon$.

(ii) A $[C_\alpha, h_\alpha]$ rendszer topologikusan tranzitív, azaz bármely $x, y \in C_\alpha$ és $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ számokra létezik olyan $x' \in C_\alpha$ és $n \in \mathbb{N}$, hogy egyrészt $|x - x'| < \varepsilon$, másrészt pedig $|h_\alpha^n(x') - y| < \delta$.

(iii) A $[C_\alpha, h_\alpha]$ rendszer érzékeny abban az értelemben, hogy létezik egy olyan $r > 0$ szám, hogy bármely $x, y \in C_\alpha$, $x \neq y$ alkalmasan választott $n \in \mathbb{N}$-re: $|h_\alpha^n(x) - h_\alpha^n(y)| \geq r$.

(iv) Létezik olyan $x^* \in C_\alpha$, amelynek pályája C_α-ban sűrű, azaz tetszőleges $x \in C_\alpha$ és $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $|h^n(x^*) - x| < \varepsilon$.

BIZONYÍTÁSOK: Mindegyik állítás egyenes következménye a szimbolikus dinamikai megfelelőjének. Példaként részletezzük az (iii) állítást. S folytonosságából adódik egy olyan $r > 0$, hogy $|x - y| < r$ maga után vonja a $d(S(x), S(y)) < 1$. Ha $x \neq y$, akkor $S(x) \neq S(y)$, tehát a szimbolikus dinamika érzékenysége alapján van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $d(\sigma^n(S(x)), \sigma^n(S(y))) \geq 1$. Mivel

$$\sigma^n(S(x)) = S(h^n(x)),$$

ezért

$$d(S(h^n(x)), S(h^n(y))) \geq 1$$

és emiatt

$$|h^n(x) - h^n(y)| \geq r.$$

A cikk tematikáját részletesen tárgyaló szakirodalom egyik legismertebb monográfiája [1], a kérdéskörnek egy másik – általunk nem is érintett – úgynevezett stochasztikus szempontból történő tárgyalása [2]-ben található.

Irodalom

[1] R.L. Devaney: An Introduction to Chaotic Dynamical Systems, Addison. Weslwy, 1993.

[2] A. Lasota and M.C. Mackey: Chaoti, Fractals, and Noise. Springer-Verlag, 1994.

Tálas Csaba – Uhrin János

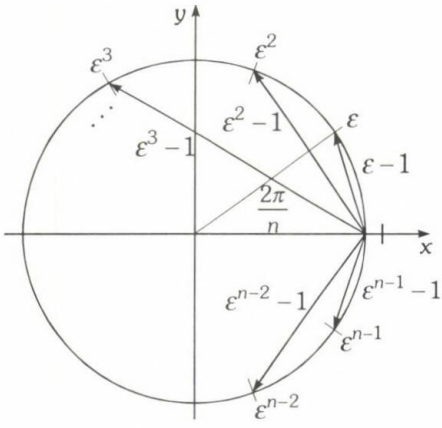
Húrcsokrok az egységsugarú körben II.

TÉTEL: Az egységsugarú körbe írt szabályos n-szög tetszőleges csúcsát a többi csúcsokkal összekötő szakaszok szorzata n-nel egyenlő. $\left(\prod_{i=1}^{n-1} h_i = n\right)$

BIZONYÍTÁS: Legyen ε a $\frac{2\pi}{n}$ argumentumú n-edik egységgyök.

Ekkor a komplex számsíkon az $1, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{n-1}$ számoknak megfelelő pontok az egységkörbe írt szabályos n oldalú sokszög csúcsai (1. ábra). Másrészt megoldásai a $z^n - 1 = 0$ egyenletnek, hiszen

$$(\varepsilon^k)^n = (\varepsilon^n)^k = 1^k = 1 \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1).$$



1. ábra

Kössük össze az 1 csúcsot a többivel! Az összekötő vektorok:

$$\varepsilon - 1, \ \varepsilon^2 - 1, \ \ldots, \ \varepsilon^{n-1} - 1.$$

Azt kell belátnunk, hogy ezek hosszának a szorzata n-nel egyenlő, azaz

$$\prod_{i=1}^{n-1} h_i = |\varepsilon - 1| \cdot |\varepsilon^2 - 1| \cdot \ldots \cdot |\varepsilon^{n-1} - 1| = n.$$

Felhasználva, hogy a tényezők abszolút értékeinek a szorzata egyenlő a szorzat abszolút értékével, a bizonyítandó állítás:

$$|(\varepsilon - 1) \cdot (\varepsilon^2 - 1) \cdot \ldots \cdot (\varepsilon^{n-1} - 1)| = n.$$

Most tekintsük a

$$z^n - 1 = (z - 1) \cdot (z^{n-1} + z^{n-2} + \ldots + z + 1) = 0$$

egyenletet!

Mivel ennek az $1, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{n-1}$ számok megoldásai, és a $(z - 1)$ tényezőnek csak a $z = 1$ gyöke, ezért az $\varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{n-1}$ szükségképpen megoldásai a $z^{n-1} + z^{n-2} + \ldots + z + 1 = 0$ egyenletnek.

Így az egyenlet bal oldalán szereplő polinomot gyöktényezős alakba írhatjuk:

$$z^{n-1} + z^{n-2} + \ldots + z + 1 = (z - \varepsilon) \cdot (z - \varepsilon^2) \cdot \ldots \cdot (z - \varepsilon^{n-1}).$$

Helyettesítsünk az egyenletünkbe $z = 1$-et. Ekkor

$$1^{n-1} + 1^{n-2} + \ldots + 1^1 + 1 = (1 - \varepsilon) \cdot (1 - \varepsilon^2) \cdot \ldots \cdot (1 - \varepsilon^{n-1})$$

$$n = (1 - \varepsilon) \cdot (1 - \varepsilon^2) \cdot \ldots \cdot (1 - \varepsilon^{n-1}).$$

Ez azt jelenti, hogy az átlóvektorok szorzata n-nel egyenlő. Mivel n pozitív szám, ezért ez a szorzat abszolút értékére is fennáll. Tehát

$$\prod_{i=1}^{n-1} h_i = n.$$

A bizonyítás csak a komplex számok bevezetés szintű ismeretét igényli.

Fejezzük ki a húrok szorzatát más úton!

Ha ***n* páratlan**, a húrok száma páros, hosszuk (2. ábra):

$$h_1 = 2\sin\frac{\pi}{n}$$

$$h_2 = 2\sin 2\frac{\pi}{n}$$

$$h_{n-2} = 2\sin 2\frac{\pi}{n} = 2\sin\left(\pi - 2\frac{\pi}{n}\right) =$$

$$= 2\sin(n-2)\frac{\pi}{n}$$

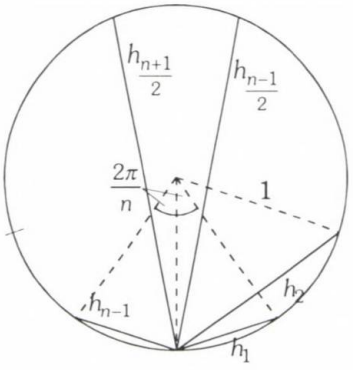
$$h_{n-1} = 2\sin\frac{\pi}{n} = 2\sin\left(\pi - \frac{\pi}{n}\right) =$$

$$= 2\sin(n-1)\frac{\pi}{n}.$$

A húrok szorzata:

$$h_1 \cdot h_2 \cdot \ldots \cdot h_{n-2} \cdot h_{n-1} = 2^{n-1} \cdot \sin\frac{\pi}{n} \cdot \sin 2\frac{\pi}{n} \cdot \ldots \cdot$$

$$\cdot \sin(n-2)\frac{\pi}{n} \cdot \sin(n-1)\frac{\pi}{n}.$$



2. ábra

Ha ***n* páros**, a húrok száma páratlan, hosszuk (3. ábra):

$$h_1 = 2\sin\frac{\pi}{n}$$

$$h_2 = 2\sin 2\frac{\pi}{n}$$

$$\vdots$$

$$h_{\frac{n}{2}} = 2\sin\frac{n}{2}\frac{\pi}{n} = 2\sin\frac{\pi}{2} = 2$$

$$\vdots$$

$$h_{n-2} = 2\sin 2\frac{\pi}{n} = 2\sin\left(\pi - 2\frac{\pi}{n}\right) =$$

$$= 2\sin(n-2)\frac{\pi}{n}$$

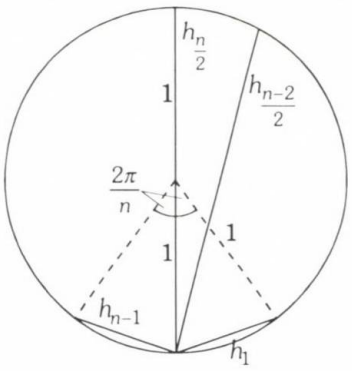
$$h_{n-1} = 2\sin\frac{\pi}{n} = 2\sin\left(\pi - \frac{\pi}{n}\right) =$$

$$= 2\sin(n-1)\frac{\pi}{n}.$$

A húrok szorzata:

$$h_1 \cdot h_2 \cdot \ldots \cdot h_{\frac{n}{2}} \cdot \ldots \cdot h_{n-2} \cdot h_{n-1} = 2^{n-1} \cdot \sin\frac{\pi}{n} \cdot$$

$$\cdot \sin 2\frac{\pi}{n} \cdot \ldots \cdot \sin\frac{\pi}{2} \cdot \ldots \cdot \sin(n-2)\frac{\pi}{n} \cdot \sin(n-1)\frac{\pi}{n}.$$



3. ábra

A húrok szorzata tehát mindkét esetben ugyanúgy fejezhető ki:

$$\prod_{i=1}^{n-1} h_i = 2^{n-1} \cdot \sin\frac{\pi}{n} \cdot \sin 2\frac{\pi}{n} \cdot \ldots \cdot$$

$$\cdot \sin(n-2)\frac{\pi}{n} \cdot \sin(n-1)\frac{\pi}{n}.$$

Mivel a komplex számok segítségével végzett bizonyítás szerint

$$\prod_{i=1}^{n-1} h_i = n,$$

ezért

$$\sin\frac{\pi}{n} \cdot \sin 2\frac{\pi}{n} \cdot \ldots \cdot \sin(n-2)\frac{\pi}{n} \cdot \sin(n-1)\frac{\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

Ennek a trigonometrikus összefüggésnek a Csebisev-polinomok segítségével, tehát a felsőbb matematika eszközeivel történő levezetése Szász Pál: A differenciál- és integrálszámítás elemei (Közoktatási Kiadóvállalat, Bp., 1951.) c. művének II. kötetében található.

A cikkben közölt bizonyítás csak elemi ismereteket használ fel, ezért középiskolában is tárgyalható szakkörön vagy fakultatív csoportokban.

Az 1995. évi Beke Manó Emlékdíjasok

A Bolyai János Matematikai Társulat Békéscsabán, július 4-7-ig rendezte meg az ez évi Rátz László Vándorgyűlést. Az ünnepélyes megnyitó immár hagyományos eseménye volt az 1995. évi Beke Manó Emlékdíjak átadása. Ebben az évben 11 díjat osztottak ki, a következőkben a díjazottak nevét és munkásságukat ismertetjük.

BRENYÓ MIHÁLY, a kecskeméti Bányai Júlia Gimnázium matematikatanára, 1978-tól 1993-ig a gimnázium igazgatója volt.

Kiváló pedagógus és igen jó szervező. Igazgatói működésének 15 éve alatt lett igazán kiemelkedő az oktatás színvonala iskolájában; Ő indította el a 8 osztályos gimnáziumi képzést, elkészítette a programot, és ezzel kapcsolatos kísérletező-fejlesztő munkálatokat ma is ő vezeti.

Tanárként nagy gondot fordít a gyengébb képességűek felzárkóztatására, a „gyógymatek"-ra. A faktosok kiválásakor általában a nem faktos csoportot választja. Munkájának eredményességét jelzi, hogy innen is minden évben két-három diák sikeres főiskolai, egyetemi felvételi vizsgát tud tenni.

A 8 osztályos képzés beindítása óta levelező versenyt és feladatmegoldó foglalkozásokat tart negyedikes általános iskolás gyerekeknek matematikából. Sikeres fogalakozásait jónéhány kolléga is rendszeresen látogatja.

Több ízben tartott színvonalas előadást a megye pedagógusainak Tanár-klubjában. Öt éve ő a Bács-Kiskun megyei TIT Matematikai szakosztályának vezetője. E tisztségében az országban elsőként szervezte meg az alsó tagozatos gyerekek megyei szintű versenyét a 1. osztálytól a 4. osztályig.

Kollégái is nagyra becsülik azért a sem időt, sem fáradtságot és sajnos az egészségét sern kímélő munkáért, amivel a gondolkodószórakoztató matematika terjesztéséért tevékenykedik, újabb és újabb játékokat talál ki és terjeszt.

Dr. CSANÁDI JÓZSEFNÉ, a csorvási általános iskola tanítója. Munkássága példa arra, hogy a nagy oktatási központoktól távol is követhetők a korszerűsitési törekvések lehet és érdemes eredményesen dolgozni.

Iskolájában az alsó tagozatos munkaközösség vezetője. 1973-tól több éven át vezette a járási alsó tagozatos munkaközösséget, 1993 óta pedig a Békés megyei tanítók matematika munkaközösaégét irányítja. Bemutató tanításokkal kiegészített előadásaival segíti a megye tanítóinak munkáját.

Kezdetektől részt vett a komplex matematikatanítási koncepció megismerésében, elsajátításában és gyakorlati alkalmazásában. 1976 és 1978 között folyamatosan, mint előadó készítette fel a megye tanítóit az akkor bevezetett tanterv oktatására.

Munkájának eredményességét tükrözik a jól felkészített, a magasabb évfolyamokon is kiválóan helytálló tanítványai, és a mindig kimagasló felmérési eredmények.

Kiemelt figyelmet fordít a tehetségek fejlesztésére, ugyanakkor jelentős eredményei vannak a lemaradók, a lassabban haladók felzárkoztatásában is.

12 éven át rendszeresen látogatta a Kis Matematikusok Baráti Körök vezetőinek tanfolyamait. Iskolájában matematika szakköröket szervez és vezet a 3. és 4. osztályos gyerekek számára. Az évente megrendezett megyei KMBK versenyeken mindig szerepelnek tanítványai az első három helyezett között.

DANCSÓ JÁNOS, a szentesi Erzsébet Téri álatlános iakola (mai nevén Római Katolikus Álatalános Iskola) tanára. Felkészültsége, pedagógiai-pszichológiai tudása és következetessége nyomán a tanítási órái, szakköri foglalkozásai és egyéb tevékenységei eredményeként tanítványai 1958-tól folyamatos résztvevői voltak a különböző városi, megyei, területi és országos versenyeknek, ahol kiváló eredményeket értek el, illetve érnek el ma is! Ne-

vét matematiktanár társai, közép és felsőfokú intézmények vezetői a legmagasabb elismeréssel említik. Volt tanítványai közül ketten jelenleg is amerikai egyetemeken tanítanak, további neveltjei tanárképző intézetekben, és más területeken végeznek eredményes oktató tevékenységet.

Életét tette fel a tanításra, nevelésre. Példamutató emberi, tanári magatartása gyermek és felnőtt generációknak adott mintát.

Minden képességfejlesztő tevékenységét a diák teljesítőképeaségére alapozott követelés, a széleskörű elméleti és gyakorlati tudáson nyugvó ismeretnyújtás, az erkölcsi tulajdonságok kialakítása és a minden gyerekkel való egyéni törődés jellemezte. Ezért szerették és szeretik ma is a szülők és gyerekek egyaránt.

JUHÁSZ NÁNDOR, a szegedi Rókus 1. sz. általános iskola tanára, és emellett a szegedi általános iskolai matematikatanárok összefogója, koordinátora, a városi rendezvények, versenyek, továbbképzések egyik fő szervezője, motorja.

Színes tanáregyéniség, méltán népszerű tanítványai körében. Diákjaival az órákon kívül is sokat és eredményesen foglalkozik. Tanítványai versenyeken évek óta igen szép eredményeket érnek el.

Hat éve szerkesztője a „Hogyan jobban?" és a „Keresd a megoldást" című Csongrád megyében megjelenő kiadványoknak.

A megyei pedagógus pályázatokon több alkalommal vett részt díjazott pályamunkáival.

Az országos versenyek egyik városi, illetve megyei koordinátora. Fontos szerepe van az évente megrendezésre kerülő Makkosházi matematikaverseny megszervezésében éa lebonyolításában.

A Csongrád megyei Matematikatanár-klub egyik megalapítója és fő szervezője. Nagy szerepe volt abban, hogy igen jó kapcsolat alakult ki a határokon túli magyar nemzetiségű matematikatanárokkal. Minden nyáron tábort szervez hazai, valamint szlovákiai, erdélyi, vajdasági magyar gyerekek és tanárok számára. Itt a tanárok matematikából és fizikából bemutató szakköri foglalkozásokat tartanak a gyerekeknek, és eközben egymás módszereit megismerik. Mindezt kiegészitik a csak tanároknak szóló továbbképző előadások és kötetlen megbeszélések.

Közreműködik a NAT-hoz kapcsolódó vizsgarendszer előkészítésében. Ő a hatodik osztályos tesztfejlesztő csoport vezetője.

KOVÁCS KÁROLYNÉ Hadas Ildikó 1989-től, az iskola létrejötte óta a budapesti Városmajori Gimnázium tanára. Az ő feladata volt az iskola matematikaoktatásának megszervezése, a tehetséggondozás iskolai kereteinek kialakítása. Ezek magas színvonalú megoldása is szerepet játszik abban, hogy ez a most kialakuló gimnázium máris jó hírnevet mondhat magáénak.

Tanári munkájában különösen nagy gondot fordít a diákok matematikai gondolkodásának fejlesztésére. Olyan feladatsorozatokat állít össze, amelyek sokoldalúan ölelik fel a tanult anyagot, és állandó gondolkodásra késztetik a diákokat a nem sablonos problémák megoldása érdekében.

Óráin nagyfokú önállósággal dolgoznak a tanulók. Gondos figyelemmel kíséri munkájukat, csak akkor avatkozik be, ha nehézségeik támadnak, és csak a legszükségesebb mértékben ad nekik útmutatást az eredményes folytatás érdekében. Ha többféle megoldást találnak egy-egy feladatra, akkor ezek megvitatásával, elemzésével változatos megoldási módszereket sajátítanak el. Ezeket az alkotó légkörű órákat az átlagos, vagy annál gyengébb képességű diákok is nagyon szereteik.

Tehetséges tanítványait az órákon kívül szakkörökön és egyéni foglalkozásokkal is fejleszti. Ilyen irányú munkájának sikerességét, a tanulók versenyeredményei is mutatják.

A matematikatanítási reformtötrekvések lelkes és eredményes terjesztője.

LACZKÓ LÁSZLÓ, a Fazekes Mihály Fővárosi Álatalános Iskola és Gimnázium tanára. Elsősorban matematikatagozatos osztályokban tanít, iskolájában és a Szt. István Gimnáziumban is.

Kiforrott tanáregyéniség. Minden feladatot legjobb tudása szerint lát el. Egyaránt gondot fordít a kiemelkedő diákokra és a szerényebb képességűekre is. Differenciált követelményrendszere eredményeként tanítványai szeretik és tudják a matematikát.

Tevékenységének középpontjában a tanulók gondolkodásra nevelése áll. Tanítványai öntevékeny gondolkodásának tudatos, meg-

tervezett fejlesztésével kiemelkedő sikereket ér el a tehetségek kibontakoztatásában. Tanítványai a legjobbak között vannak az Arany Dániel versenyen, az OKTV-n, a Kürschák versenyen és a Nemzetközi Matematikai Diákolimpián.

Továbbképzési feladatainak magas szinten tesz eleget. Órái és szakmai, illetve módszertani előadásai kiválóak. Az ezeken résztvevő tanárok a látottakból és hallottakból sokat tudnak a saját gyakorlatukban közvetlenül hasznosítani. Kitűnik a különböző témákban összeállított egymásra épülő feladatsoraival, s az ezekhez fűzött módszertani megjegyzéseivel. Bemutatja, hogy a nehéz, gondolkodtató feladatok hogyan készíthetők elő, s hogyan vonhatók be ezek megoldásába a diákok.

Több, mint másfél évtizede tagja az OKTV bizottságának. A matematikatanítás érdekeiért mint a BJMT Oktatási szakosztályának alelnöke is dolgozik. Tevékenyen vesz részt a Rátz László vándorgyűlések szervezésében. Kezdeményezte az ország különböző speciális matematika tagozatain tanító tanárok továbbképzésének és tapasztalatcseréjének felújítását.

REIMAN ISTVÁNNÉ Baumann Éva előbb az ELTE, majd 1971-től az 1991-ben történt nyugdíjba vonulásáig az Ybl Miklós Műszaki Főiskola oktatója volt.

Főiskolai munkájában kezdettől fogva arra törekedett, hogy megkísérelje a főiskolákon nem túlságosan kedvelt matematika iránt az érdeklődés felkeltését, észrevétesse a matematikában rejlő szépséget és hasznosságot. Kezdettől fogva külön foglalkozott azokkal a hallgatókkal, akik a Gépipari és Távközlési Műszaki Főiskola által létrehozott Neumann János vándordíjas matematikaversenyeken a Főiskolát képviselték. Amikor ez a versenyforma a vándordíj végleges elnyerése következtében befejeződött, kezdeményezte ennek folytatását, vezetésével megalkották a Hajós György Matematikai verseny szabályzatát és elindították a versenyt. Ez a verseny azóta is létezik, minden évben más-más főiskola rendezi meg, és ennek köszönhetően sikerül a főiskolák hallgatói és tanárai között szakmai kapcsolatokat létesíteni, illetve fenntartani. Ezeknek a versenyeknek a 18 éve alatt gyakran működött közre, megszervezésükben, a feladatok kitűzésében és elbírálásában, ezt a tisztet még nyugdíjbavonulása után is ellátta, ill. ellátja. Mindvégig lelkes közreműködése eredményeképpen főiskolája versenyzői többször értek el szép eredményeket.

Több alkalommal tartott előadást Társulatunk vándorgyűlésein.

Éveken át dolgozott a matematikából felvételizők felkészítésében, s a felkészítők feladatainak összeállításában.

Több egyetemi és főiskolai tankönyv, valamint jegyzet szerkesztője, illetve lektora.

Dr. SZARKA ZOLTÁN 1950 óta a Miskolci Nehézipari Műszaki Egyetem oktatója. 1992-től nyugdíjas, de változatlanul tanít az egyetem Matematikai Intézetében.

Ízzig-vérig oktató, a metematika népszerűsítője. Hallgatói háromszor választották az „előadók előadójá"-vá és ő az egyetlen oktató a Miskolci Egyetemen, akit ugyancsak a hallgatók háromszor tüntettek ki aranygyűrűvel.

Sokszor tartott színvonalas népszerűsítő előadásokat borsodi középiskolákban, továbbképző előadásokat a Bolyai Társulat megyei tagozata rendezvényein, egyéb szakmai előadásokat belföldön és külföldön egyaránt. Több társulati rendezvény szervezésében is résztvett, így például a legutóbbi három nemzetközi numerikus módszerek konferencia szervezőbizottságának tagjaként sokat tett a konferenciák sikeres miskolci lebonyolítása érdekében. Ugyancsak kiemelhető az 1994 nyarán, környező országokban élő magyar diákok részére szervezett tehetséggondozó tábor érdekében végzett munkája.

Rendkívül sok, a matematikát népszerűsítő cikke mellett tudományos munkáját 8 könyv, 13 egyetemi jegyzet és 44 szakdolgozat irányítása fémjelzi. Tankönyvei és egyetemi jegyzetei több kiadást értek meg és sok mérnökgeneráció felkészüléséhez nyújtottak segítséget.

1950-től tagja a Bolyai Társulatnak. Több ízben a Borsodi Tagozat vezetőségi tagja, illetve alelnöke.

Dr. TÓBER ERNŐ 1959-től 1988-ban bekövetkezett leszázalékolásáig a nagykanizsai Thury György Közgazdasági Szakközépiskola tanára volt.

Kiválóan képzett, nagy tapasztalattal rendelkező, munkáját mindig tervszerűen, tu-

datosan végző szaktanár. Tanítása során kereste a korszerű módszerek felhasználásának lehetőségeit. Rendszeresen alkalmazta a differenciált foglalkoztatást, a diákokkal való kiscsoportos és egyéni foglalkozást is.

A megyében elsőként kapcsolódótt be az ELTE TTK Matematika Szakmódszertani Csoport által vezetett matematikaoktatási kisérletbe. A témával kapcsolatban színvonalas tanulmányt publikált az ELTE Szakmódszertani Közleményeiben.

Szívesen és eredményesen foglalkozott tehetséges tanulókkal is. Tanítványai sikeresen szerepeltek a tanulmányi versenyeken. Kiemelkedő színvonalú szakköri feladatgyűjteményt írt általános iskolás és kezdő középiskolai diákok számára. Ez 1977-ben az ELTE-n jegyzetként megjelent. A megyei Pedagógiai Intézet gondozásában is több feladatgyűjteménye jelent meg.

A Társulat Zala megyei Tagozatának sok éven át vezetőségi tagja volt, aktívan vett, és vesz részt a matematikai szaktáborok munkájában, gazdag tapasztalatairól színvonalas előadásokat tart pedagógusok számára.

UHRIN JÁNOS 1968 óta a békéscsabai Rózsa Ferenc Gimnázium tanára. Kiváló pedagógiai munkája és szaktanácsadói tevékenysége révén lett ismert megyeszerte.

Változatos formákban segíti a matematika iránt érdeklődő diákokat. Évente szervezi a megyei matematikai tanulmányi versenyt. Elsősorban az ő munkája eredményeként honosodott meg Békéscsabán a Szőkefalvi-Nagy Gyula Emlékverseny és a hozzá kapcsolódó feladatmegoldó szeminárium.

Nyári bentlakásos táborokat szervezett a matematikából tehetséges diákok számára. Tanítványai éveken át kiemelkedő eredménnyel szerepeltek a KöMaL matematika és fizika feladatmegoldó Versenyein és az Arany Dániel versenyeken.

A megye egyik legtöbbet publikáló nevelője. A matematikaoktatás színvonalának emelése érdekében különböző feladatlapokat, segédanyagokat állított össze.

Öt dolgozatát a megyei pedagógiai pályázatokon második, illetve harmadik díjjal jutalmazták. 1986-ban a szegedi Akadémiai díjat is elnyerte.

Nemcsak saját anyagaival segíti a megye tanárainak továbbképzését, hanem a kollégák publikációs törekvéseinek is támogatója. Az intenzív továbbképzések anyagából válogatott kiadványsorozata több éve kedvelt szakirodalma a tanároknak.

Szaktanácsadóként minden évben szervezett egy-egy tanulmányutat matematika munkaközösségvezetők számára. A Bolyai Társulat megyei tagozatának titkáraként rendszeresen kiváló előadókat hív meg, hogy a kollégák megismerhessék a legújabb tantervi elképzeléseket és reformtörekvéseket.

UHRIN JÁNOSNÉ a békéscsabai X. sz Általános iskola tanítója azok közé a lelkes és jól felkészült pedagógusok közé tartozik, akiknek sikerült megszerettetniük tanítványaikkal a matematikát. 37 éves oktatói munkássága során első és második osztályosokkal foglalkozott. Pedagógiai elve a biztatás, az elismerés, a sokféle segítségnyújtás. Soha nem mondott le arról, hogy a rábízott gyerekeket a megfelelő szintre eljuttassa. Korszerű módszerének alkalmazásával, az egyéni bánásmód elvének tudatos alkalmazásával igyekezett megkönnyíteni tanítványainak a tudás megszerzését. Nagy figyelmet fordított a szilárd alapkészségek kialakítására, a gyenge és hátrányos helyzetű tanulók segítésére, felzárkóztatására. Ugyanakkor komoly érdemei vannak a tehetséggondozás terén is.

Első osztályos gyermekeik számára a körzetbe tartozó szülők őt kérik tanítójuknak. Évekig eredményesen irányította az alsó tagozatos munkaközösséget. A pályakezdő pedagógusokksl való külön törődése, a pedagógus pálya megszerettetése kiemelkedő érdemei közé tartozik.

Az egy hónapos tanítási gyakorlat során hozzá került hallgatók élményekkel gazdagodva, a módszertani tapasztalatok egész tárházával térnek vissza a főiskolára. Személyes példája hitükben és hivatásszeretetükben egyaránt erősíti őket.

Ötletes, a tanításban jól használható matematikai játékot talált ki és alkalmazott munkája eredményessé tétele érdekében. Erről a matematikatanárok Klubjában (Budapesten) 1994. őszén nagysikerű előadást tartott, valamint a Matematika tanítása c. folyóiratban is beszámolt.

HÍREK VERSENYEKRŐL

A IV. Nemzetközi Magyar Matematikaversenyről

A versenyt 1995. március 31-től április 4-ig Pakson az Energetikai Szakképzési Intézetben rendezték meg. A házigazdák, elsősorban dr. Gálos István igazgató, valamint Árokszállási Tibor és Árokszállási Eszter tanárok, a szakmai szervezők ideális körülményeket biztosítottak a négy környező országból (Szlovákia, Ukrajna, Románia, Szerbia) és hazánkból érkezett több mint 200 középiskolás versenyző és közel 60 kísérő tanár számára a verseny és a hozzá kapcsolódó tanácskozások zavartalan lebonyolításához.

A verseny feladatai az egyes osztályok számára a következők voltak:

I. osztály

1. A mellékelt 3×3-as bűvös négyzetben minden sorban, minden oszlopban és mindkét átlóban ugyanannyi a számok összege. Határozzuk meg a hiányzó számokat!

199	995	
		1995

Kiss Sándor, Nyíregyháza

2. Egy háromszög oldalai: a, b, c; egy másik háromszögé: p, q, r. Bizonyítsuk be, hogy ezekre érvényes a következő egyenlőtlenség:

$$(a+1)^2+(b-1)^2+(c+1)^2-2(ap+bq+cr)> \\ >6-(p+1)^2-(q-1)^2-(r+1)^2!$$

Oláh György, Révkomárom

3. Az $ABCD$ téglalap köré írt körének C-t nem tartalmazó AB ívén vegyünk fel egy tetszőleges P pontot. P-ből az AC ill. BD átlókra állított merőleges talppontja legyen L ill. M. Bizonyítsuk be, hogy az LM szakasz hossza nem függ a P pont helyzetétől!

Szabó Magdolna, Szabadka

4. Egy 9×9-es táblázat mezőire ráírjuk tetszőleges sorrendben az 1,2, ..., 81 számokat. Bizonyítsuk be, hogy bármely elrendeződés esetén található két olyan szomszédos mező, melyeken levő számok különbsége legalább 6! (Két mező akkor szomszédos, ha van közös oldaluk.)

Szabó Magdolna, Szabadka

5. Bizonyítsuk be, hogy 1995^4+4^{1995} összetett szám!

Benedek Ilona, Vác

6. Állítsuk elő az összes olyan x, y racionális számot, amelyek kielégítik a következő egyenletet:

$$3x^2-5x+9=y^2!$$

Bencze Mihály, Brassó

II. osztály

1. Egy $n \times n$-es táblázat minden mezőjére ráírjuk az 1, 2, 3 számok valamelyikét. Ki lehet-e tölteni a táblázatot úgy, hogy a sorokban, az oszlopokban és a két átlóban levő számok összege mind különböző legyen?

Kiss Sándor, Nyíregyháza

2. Bizonyítsuk be, hogy ha p és q 3-nál nagyobb prímszámok, akkor

$$p^2 + 7q^2 - 23$$

nem prímszám!

Oláh György, Révkomárom

3. Az ABC háromszög C csúcsánál derékszög van. A B-ből induló szögfelező az AC befogót a P, a háromszög köré írt kört a Q pontban metszi. Mekkorák a háromszög szögei, ha $BP = 2PQ$?

Benedek Ilona, Vác

4. Bizonyítsuk be, hogy minden x valós számhoz létezik olyan y valós szám, hogy az $(x; y)$ számpár megoldása az

$$x^5 + y^5 - x^4 - y^4 + x^4y + xy^4 - x - y + 1 = 0$$

egyenletnek!

Kiss Sándor, Nyíregyháza

5. Legyen M a hegyesszögű ABC háromszög AD magasságának egy belső pontja, és legyen A_1 a háromszög köré írt kör A végpontú átmérőjének másik végpontja. Az A-ból az A_1M egyenesre emelt merőleges a BC egyenest A_0-ban metszi; az M-ből AC-re ill. AB-re állított merőlegesek talppontjait jelölje B_0 ill. C_0. Bizonyítsuk be, hogy A_0, B_0, C_0 egy egyenesen vannak!

András Szilárd, Csíkszereda

6. Határozzuk meg azt az f függvényt, amely

a) minden nemnegatív egészhez nemnegatív egész számot rendel hozzá, különböző egészekhez különböző egészeket;

b) minden nemnegatív egész n-re kielégíti az

$$f^2(0) + f^2(1) + \ldots + f^2(n) \le \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

egyenlőtlenséget! ($f^2(x) = f(x) \cdot f(x)$)

Bencze Mihály, Brassó

III. osztály

1. Az $AB = 1$ átmérőjű félkörbe olyan $ABCD$ trapézt szerkesztettünk amely érintőnégyszög is. Mekkora a trapéz két szára?

Kiss Sándor, Nyíregyháza

2. Az e élhosszúságú $ABCDA'B'C'D'$ kocka egy lapja az $ABCD$ négyzet; az AA', BB', CC', DD' élek párhuzamosak. Mekkora az $ADCD'$ és a $BCDC'$ derékszögű tetraéderek közös részét képező test felszíne és térfogata?

Bogdán Zoltán, Cegléd

3. Bizonyítsuk be, hogy

a) $\log_a \frac{2bc}{b+c} + \log_b \frac{2ca}{c+a} + \log_c \frac{2ab}{a+b} \ge 3,$

ha $0 < a, b, c < 1$;

b) $\log_a \frac{b+c}{2} + \log_b \frac{c+a}{2} + \log_c \frac{a+b}{2} \ge 3,$

ha $a, b, c > 1$! Milyen esetben áll fenn az egyenlőség?

Weszely Tibor, Marosvásárhely

4. Egy sakkbajnokságon mindenki mindenkivel játszott. Győzelemért 1, döntetlenért 1/2, vereségért 0 pont járt. A bajnokság végén kiderült, hogy minden résztvevő pontszámának felét az utolsó három helyezett elleni játszmákban szerezte. Hány résztvevője volt a versenynek?

Katz Sándor, Bonyhád

5. Határozzuk meg azokat az x, y, z, t valós számokat, amelyek kielégítik a következő egyenletet:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 1 = t + \sqrt{x + y + z - t}\,!$$

Kovács Béla, Szatmárnémeti

6. Határozzuk meg azt a valós számok halmazán értelmezett valós értékű f függvényt, amely minden valós x-re kielégíti az

$$(f(x))^3 + (x^2 + x^4 + \ldots + x^{2n})f(x) = \\ = 2x^3 + x^5 + x^7 + \ldots + x^{2n+1}$$

egyenletet ($n \ge 1$ rögzített egész)!

Bencze Mihály, Brassó

IV. osztály

1. Az A csúcsú α hegyesszög szögtartományában vegyünk fel egy tetszés szerinti P pontot. Ennek merőleges vetülete a szögszárakon legyen B illetve C. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{BC}{AP} = \sin\alpha !$$

Csorba Ferenc, Győr

2. Az $ABCD$ konvex négyszög átlói az O pontban metszik egymást. Mutassuk meg, hogy az

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = \\ = 2(AO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2)$$

egyenlőség akkor és csakis akkor teljesül, ha vagy az átlók merőlegesek, vagy pedig O felezi valamelyik átlót!

Kiss Sándor, Nyíregyháza

3. Adott az $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ pozitív számokból álló halmaz. Írjuk fel minden nemüres részhalmazában a számok összegét! Igazoljuk, hogy az így felírt számokat n csoportba tudjuk osztani úgy, hogy az azonos csoportban a legnagyobb és legkisebb szám hányadosa nem nagyobb 2-nél!

Katz Sándor, Bonyhád

4. Bizonyítsuk be, hogy ha x és y olyan pozitív egészek, amelyekre

$$2x^2 + x = 3y^2 + y$$

teljesül, akkor $x - y$, $2x + 2y + 1$ és $3x + 3y + 1$ is négyzetszámok!

Bogdán Zoltán, Cegléd

5. Határozzuk meg az összes olyan f függvényt, amely az egész számok halmazán van értelmezve és értéke is egész, és minden x egészre eleget tesz a következő egyenletnek:

$$3f(f(x)) = 2f(x) + x!$$

András Szilárd, Csíkszereda

6. Fibonacci-sorozatnak nevezzük az $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ $(n \geq 3)$ kikötésekkel értelmezett sorozatot. Bizonyítsuk be, hogy ha $0 < p < n$, akkor az

$$F_{2p+1} + F_{2p+3} + ... + F_{2n+1} \quad \text{és} \\ F_{2p} + F_{2p+2} + ... + F_{2n}$$

számok nem lehetnek a Fibonacci-sorozat tagjai.

Bencze Mihály, Brassó

A verseny eredményéből a díjazott tanulók nevét és iskoláját emeljük ki:

Az I. osztályosok közül I. díjat kapott:

Szeles Tamás, Szeged, Radnóti Miklós Gimnázium,
Hartmann Miklós, Bonyhád, Petőfi Sándor Gimnázium.

II. díjat kapott:

Less Áron, Miskolc, Földes Ferenc Gimnázium,
Nyul Gábor, Debrecen, Fazekas Mihály Gimnázium.

III. díjat kapott:

Szőke Sándor, Sepsiszentgyörgy (Románia).

A II. osztályosok közül I. díjat kapott 4 versenyző:

Braun Gábor, Budapest,
Berki Csaba, Székesfehérvár,
Pap Gyula, Debrecen, Fazekas Mihály Gimnázium,
Frenkel Péter, Budapest, Fazekas Mihály Gimnázium.

II. díjat kaptak:

Megyeri Csaba, Nagykanizsa, Batthyány Lajos Gimnázium,
Juhász Zsófia, Veszprém.

A III. osztályosok közül I. díjat kapott:

Tarján Péter, Budapest, Piarista Gimnázium.

II. díjat kaptak:

Szobonya László, Budapest,
Tóth Gábor Zsolt, Budapest,
Burcsi Péter, Pápa.

III. díjat kaptak:

Ságí Krisztián, Komárom (Szlovákia),
Feleki Zsolt, Kolozsvár (Románia).

A IV. osztályosok közül I. díjat kaptak:

Lázár Emese, Székhelyudvarhely (Románia),
Csapó Hajnalka, Csíkszereda (Románia).

II. díjat kaptak:

Alexics Gábor, Budapest, Berzsenyi Dániel Gimnázium,
Németh Sándor, Vác, Boronkay Szakközépiskola.

III. díjat kaptak:

Halász György, Budapest, Berzsenyi Dániel Gimnázium,
Hegedűs Viktor, Paks, Gimnázium,
Ehreth Imre, Bonyhád, Petőfi Sándor Gimnázium,

Az 1996. évi, V. versenyt Erdélyben, Székelyudvarhelyen rendezik meg.

A szervezők felkérik a Kárpát medence matematikusait, hogy minél több kitűzésre szánt feladatjavaslatot küldjenek ben a középiskolás anyagból. A feladatok legyenek eredetiek és részletest megoldást is mellékeljenek legkésőbb 1996. januér 30-ig a következő címre:

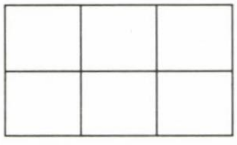
Bencze Mihály, str. Hármanului 6
2212 Sácele 3, jud. Brasov
Románia

A Kalmár László Országos Verseny döntőjéről

A verseny döntőjét 1995. június 20-án és 21-én Vácott rendezte meg a TIT Teleki László Ismeretterjesztő Egyesület. A döntőbe jutott 99 tanuló (10-14 évesek) a következő feladatokat oldotta meg a két forduló során:

Ötödik osztály
1. nap

1. Írjunk be az ábrán látható 6 négyzetbe egy-egy 0-tól különböző számjegyet úgy, hogy a két sorban (balról jobbra) és felülről lefelé egy-egy pozitív egész szám négyzete álljon!



2. Vágjunk szét egy körlemezt 6 egyenessel a lehető legtöbb részre. Hány részt kapunk?

3. Osszuk fel a 45-öt 4 részre úgy, hogy ha az első részhez 2-t adunk, a másodikat 2-vel csökkentjük, a harmadikat 2-vel szorozzuk, a negyediket 2-vel osztjuk, akkor egyenlő számokat kapunk!

4. Vegyünk fel a síkon öt pontot, és ezek mindegyikét kössük össze az összes többivel! Hány egyenest kaphatunk így? És ha hat pontot veszünk fel? (Vizsgáld meg az összes lehetőséget!)

Hatodik osztály
1. nap

1. A 2, 3, 6 számok érdekes tulajdonsága, hogy összegük 11 és reciprokaik összege: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$. Állítsuk elő a 24-et és a 31-et is olyan pozitív egészek összegeként, amelyeknek reciprokait összeadva 1-et kapunk!

2. Igazoljuk, hogy a 376 bármely pozitív egész kitevőjű hatványa 376-ra végződik!

3. Egy húrtrapézt (szimmetrikus trapézt) az egyik átlója két egyenlő szárú háromszögre bont. Mekkorák a trapéz szögei?

4. Egy téglalap kerületét centiméterekben mérve egész szám fejezi ki. Kiderült, hogy ugyanez az egész szám mutatja meg azt is, hány 1 cm oldalú kis négyzettel rakható ki pontosan a téglalap területe. Mekkorák lehetnek a téglalap oldalai?

Hetedik osztály
1. nap

1. Melyik az a tízes számrendszerben felírt ötjegyű egész szám, amelyre igaz, hogy ha a szám végére írunk egy 1-est, akkor 3-szor akkora számot kapunk, mint ha az elejére írnánk egy 1-est?

2. Adott egy konvex tízszög. Hány olyan háromszög van, amelynek csúcsai a tízszög csúcsai közül kerülnek ki, de a háromszögnek nincs közös oldala a tízszöggel?

3. Az n és az $n+1$ szám tízes számrendszerbeli alakjáról tudjuk, hogy számjegyeik összege páratlan. Hány ilyen n szám van az első 1000 pozitív egész szám között?

4. Az ABC egyenlő szárú háromszögben $AC = BC$ és $ACB\sphericalangle = 80°$. A háromszög belsejében egy P pontot úgy vettünk fel, hogy $PBA\sphericalangle = 30°$ és $PAB\sphericalangle = 10°$. Bizonyítsuk be, hogy $APC\sphericalangle = 70°$!

5. „Kockás" fehér papíron 40 kis négyzetet pirosra festettünk. Igaz-e, hogy mindig ki lehet jelölni a 40 közül 10 piros négyzetet úgy, hogy semelyik kettőnek sincs közös pontja (még közös csúcsa sem!)?

Nyolcadik osztály
1. nap

1. Mutassuk meg, hogy ha egy háromjegyű páros szám első két jegyéből álló számhoz hozzáadjuk az utolsó számjegy felét és a kapott szám osztható 4-gyel, akkor az eredeti háromjegyű szám osztható 8-cal!

2. Hány olyan 20 egység kerületű háromszög van, amelyre teljesül, hogy oldalainak hosszát egész szám fejezi ki? (Két háromszöget azonosnak tekintünk, ha oldalaik ugyanolyan hosszúságúak.)

3. Tudjuk, hogy az a, b, c, d számokra teljesül, hogy $a < b < c < d$. Rakjuk növekvő sorrendbe a következő számokat:

$$x = (a + b)(c + d),$$
$$y = (a + c)(b + d),$$
$$z = (a + d)(b + c)!$$

4. Egy derékszögű háromszög egyik hegyesszöge 5-szöröse a másik hegyesszögének, a háromszög átfogója c. Számítsuk ki a háromszög területét!

5. Egy egér rágcsál egy 3 egység oldalú, kocka alakú sajtot, amely 27 egységkockából van összerakva. Amikor egy egységkocka sajtot megevett, átmegy a szomszédos, vele közös lappal rendelkező egységkockába és azt eszi. Előfordulhat-e, hogy az egér a középső kocka kivételével a többi 26 egységkockát megeszi?

Ötödik osztály
2. nap

1. Hány olyan téglatest van, amelynek mindegyik éle cm-ekben kifejezve 1 és 10 közötti egész szám (beleértve az 1-et és a 10-et is)?

2. Egy bizonyos hónapban három csütörtök dátuma is páratlan szám volt. Hányadika lehetett a hónap utolsó vasárnapján?

3. Egymás után írtuk az első 100 pozitív egész számot. Húzz ki 10 számjegyet úgy, hogy a lehető legnagyobb szám maradjon! (Állításodat indokold!)

4. Írj fel legalább három olyan pozitív egész számot, amelyekre igaz, hogy a négyzetük tízes számrendszerbeli alakjában minden számjegy prímszám (törzsszám)!

Hatodik osztály
2. nap

1. Hány különböző olyan pozitív egészekből álló számhármas van, amelyeknek összege 60? (A számok különböző sorrendje nem számít különbözőnek.)

2. Jóska és Berci – egymástól függetlenül – kirándulni indultak. Kiderült, hogy egyforma ideig voltak távol, egyenlő távolságot tettek meg, és útközben mindketten megpihentek. Tudjuk még, hogy Jóska kétszer annyi ideig volt úton, mint amennyit Berci pihent, Berci pedig háromszor annyi ideig volt úton, mint ameddig Jóska pihent. Melyikük haladt gyorsabban?

3. Egy rombusz tompaszögű csúcsából induló két magasságvonalának az oldalakkal való metszéspontjait összekötő szakasza a rombusz hosszabbik átlójának fele. Mekkorák a rombusz szögei?

4. A Fibonacci-sorozat első két eleme: 1, 1, a további elemeket úgy kapjuk, hogy az előző két elemet összeadjuk: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ... Bizonyítsuk be, hogy a sorozat minden ötödik eleme osztható 5-tel!

Hetedik osztály
2. nap

1. Egy tízes számrendszerben felírt szám egyenlő számjegyei összegének 17-szeresével. Melyik lehet ez a szám?

2. Melyik az az öt szám, amelyeket páronként összeadva a következő számokat kapjuk eredményül: 3, 5, 6, 9, 10, 10, 11, 12, 13, 17?

3. Figyeljük meg a következő egyenlőségeket:

$$1 + 2 = 3,$$
$$4 + 5 + 6 = 7 + 8,$$
$$9 + 10 + 11 + 12 = 13 + 14 + 15!$$

Általánosítsunk és bizonyítsunk! (Azaz: az egymást követő pozitív egészek összegének két szomszédos négyzetszám közé eső szeletét osszuk két csoportra úgy, hogy a csoportban lévő számok összege egyenlő legyen!)

4. Adott a síkon két párhuzamos egyenes, az egyiken 10, a másikon 20 pont. Hány olyan háromszög van, amelynek csúcsai az adott pontok közül kerülnek ki?

Nyolcadik osztály
2. nap

1. Egy egyenlő szárú, tompaszögű háromszög két belső szögfelezője közül a hosszabb kétszerese a rövidebbnek. Mekkorák a háromszög szögei?

2. Legyen a és b olyan pozitív egész, amelyre $b^2 = a - b$. Bizonyítsuk be, hogy $a + b + 1$ négyzetszám!

3. Egy kockát tetraéderekre darabolunk. Legalább hány tetraédert kapunk?

4. Igazoljuk, hogy öt egymást követő pozitív egész szám négyzetének összege nem lehet egy egész szám négyzete!

A verseny első három helyezettje az egyes osztályokban

5. osztály:

1. Kovács Erika, Hajdúszoboszló, tanárai: Szabó Gyuláné és Deli Lajos
2. Horváth Illés, Budapest, Tanoda tér, tanára: Kiss Tiborné
3. Erdei Zsuzsa, Kaba, tanárai: Szilágyi Zoltánné és Deli Lajos.

6. osztály:

1. Halasi Tamás, Budapest, Veres Péter Gimn., tanára: Kötél Tamás
2. Babos Attila, Budapest, Radnóti Miklós Gimn., tanára: Széplaki Györgyné
3. Szeti Balázs, Székesfehérvár, Hétvezér Téri Ált. Isk., tanárai: Balogh Mária és Moldoványi Zoltánné.

7. osztály:

1. Győri Nikolett, Budapest, Fazekas Mihály Gimnázium, tanárai: Fazakas Tünde, Montágh Balázs
2. Torbágyi Andrea, Székesfehérvár, Teleki Blanka Gimnázium, tanárai: Ponáczné Csuti Márta, Sipos Imre
3. Hesz Zoltán, Budapest, Fazakas Mihály Gimnázium, tanára: Fazekas Tünde.

8. osztály:

1. Patakfalvi Zsolt és Terpai Tamás – mindketten a budapesti Fazekas Mihály Gimnázium tanulói, tanáruk: Dobos Sándor
2. Végh Zoltán, Makó, Kálvin Téri Általános Iskola, tanára: dr. Varga Istvánné
3. Gueth Krisztián, Szombathely, Kanizsai Dorottya Gimnázium, tanára: Sándor Endre.

A tanárképző főiskolák 1995. évi Péter Rózsa Matematikaversenyének feladatai (Szeged, 1995. április 10.)

1. Bizonyítsuk be, hogy bármely hegyesszög ívmértéke kisebb, mint a szög szinuszának és tangensének harmonikus közepe!

2. Legyen $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$. Igazoljuk, hogy $e^{a_n} > n + 1$!

3. Bizonyítsuk be, hogy ha egy hegyesszögű háromszög köré írt körének középpontja O, sugara r és magasságpontja M, akkor az O és M fókuszú, r nagytengelyű ellipszis érinti a háromszög oldalait!

4. Legyen P az ABC háromszög belsejének egy tetszőleges pontja. A D, E, F pontok rendre az AP, BP, CP egyeneseknek a BC, CA, AB oldalakkal való metszéspontjai. A P pont milyen választása esetén lesz a DEF háromszög területe maximális?

5. Az f függvény a pozitív egész számok halmazát önmagába képezi és minden n pozitív egészre igaz, hogy $f(f(n)) + f(n) = 2n + 6$. Adjuk meg az f függvényt!

6. Igazoljuk, hogy ha α, β, γ egy hegyesszögű háromszög szögei, akkor

$$2 < \sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma \leq \frac{9}{4}!$$

7. Legyen $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n$ valós számoknak olyan véges sorozata, amelyre $x_i = 2^{-k_i}$, $k_i \in \mathbb{N}^+$, $i = 1, 2, \ldots, n$ és $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$ teljesül. Igazoljuk, hogy a sorozatból kiválasztható néhány elem úgy, hogy ezek összege $\frac{1}{2}$!

Hajós György Matematikaverseny feladatai (Budapest, 1995. április 6.)

1. Adja meg a racionális számok halmazán értelmezett

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$$

függvény egész értékeinek halmazát!

2. Egy számsorozat első tagja 1. Minden egyes további tagja 4-gyel nagyobb az előtte álló tagok összegéből vont négyzetgyök 4-szeresénél. Mennyi a sorozat első 1995 tagjának összege ?

3. Egy táblára felírtunk 1994 db 1-est, 1996 db 3-ast és 1995 db 5-öst. Bármely két különböző számot letörölhejük, ha helyette a harmadik számjegyet egyszer felírjuk a táblára. Bizonyítsa be, hogy ezt az eljárást ismételve elérhetjük, hogy csak egyféle szám marad a táblán! Melyik lehet ez a szám ?

4. Oldja meg a következő egyenletrendszert!

$$x + y - z = 4$$
$$x^2 + y^2 - z^2 = 12$$
$$x^3 + y^3 - z^3 = 34$$

5. Bizonyítsa be, hogy szabályos ötszög nem helyezhető el úgy a térbeli derékszögű koordináta-rendszerben, hogy minden csúcsa rácspontra (egész koordinátájú pontokra) essen!

Vincze István – Kain Mihály

Az 1994/95. tanévi feladatmegoldó verseny értékelése

A MOZAIK Oktatási Stúdió az 1994/95-ös tanévben is megrendezte a 4 fordulós feladatmegoldó versenyét. Az 5-6. osztályosok között 68, a 7-8. osztályosok között 60 tanuló nevezett be. (Ez utóbbi csoportban néhányan a párkányi magyar iskola tanulói voltak.)

A feladatok javítása során felmerült általános észrevételeink :

1. A dolgozatok formailag nem tesznek eleget az elvárásoknak. Minden feladat megoldását új lapra kell írni és minden egyes lapon szerepelnie kell a megoldó és iskolája nevének. Az írásbeli közlés legyen könnyen áttekinthető és olvasható.

2. A megoldások végén gyakran elmarad a végső válasz a feltett kérdésre. (Általában 1-2 pont került levonásra emiatt.)

3. Gyakran előfordult, hogy csak a végeredményt küldték be. Ez feltételezi, hogy valamilyen megfontolás után kapta az eredményt a pályázó, de ilyen esetben is 2-4 pont levonásra került.

4. A verseny jó lehetőséget teremt arra, hogy a pályázó egy kisebbfajta dolgozatként készítse el a megoldásait. Nagyon fontos, hogy a diákok felismerjék: egy gondolatmenetben mi a lényeges, amit hangsúlyozni kell.

5. Kiemelendőnek tartjuk a számolási műveletek illetve a szerkeszthetőség ellenőrzését. Így nem fordult volna elő számolási hiba még a legegyszerűbb feladatban sem.

6. A közölt megoldások utólagos tanulmányozása segítséget nyújt a hasonló típusú feladatok megválaszolásához.

Néhány érdekes, ötletes megoldás az I. korcsoportból :

94/25. feladat: Görey Ágnes az $A + 481B = 999[40 - (A + B)]$ egyenletből indul ki és megállapítja, hogy a (40-nél kisebb) A osztható 37-tel .

Venter Lóránd ötlete: $B = \frac{100C - 4}{48}$ és a számláló 96-ra végződik és 48-cal osztható, ezért $C = 12k + 1$.

95/2. feladat: Hámori Éva ötlete az $1 + 3 + \ldots + (2n - 1) = n^2$ összefüggés alapján a keresett összeg $500^2 - 50^2 = 247\,500$.

A II. korcsoportból két dolgozatra térnék ki.

94/29. feladat: Bálint Nóra oszthatóságon alapuló megoldása nagyon „egyszerű" és szép.

95/13. feladat: Cserepes Mária a két hatszöget egymáshoz képest 30°-kal elforgatva vette fel és egyszerű darabolással látta be, hogy a területek aránya 4 : 3.

Végül két megjegyzés:

- A 21. és 30. feladat hasonló problémát vetett fel és sokan csak egyféle színezés kipróbálása után jelentették ki , hogy a feladat nem oldható meg.
- A 28. feladat megoldásának tanulmányozására külön fel kell hívni a figyelmet: 4 mérés eredményét feltételezve – gondoljuk végig, az 5. mérésnél mely esetek **nem** állhatnak elő.

1995. június 3-án a szegedi Juhász Gyula Tanárképző Főiskolán került sor a döntő megrendezésére. Az I. korcsoportban 17, a II. korcsoportban 14 tanuló vett részt. Mindkét csoportban 5 feladatot kellett 90 perc alatt megoldani. (A feladatokat és megoldásukat lásd alább.)

A zsűri – korcsoportonként – a legjobban szereplő versenyzőket tárgyjutalomban részesítette.

A döntő végeredménye :

I. korcsoport (5-6. osztály)

1. Varjú Péter, 36 pont, Béke Utcai Általános Iskola, Szeged, felkészítő tanára: Melega Jánosné
2. Rafael Balázs, 34 pont, Jedlik Ányos Gimnázium , Budapest, felkészítő tanára: Sebestyén Zoltánné és Kovács Gabriella
3. Lovrics Anna, 30 pont, Kőrösi Csoma S. Általános Iskola, Budapest, felkészítő tanára: Andruskó Dénesné
4. Láda Judit, 29 pont, Jedlik Ányos Gimnázium, Budapest
5. André Róbert, 28 pont, Kálvin Téri Általános Iskola , Makó
   Görey Ágnes, 28 pont, Általános Iskola, Kótaj
   Kocsis Zoltán, 28 pont, Kálvin Téri Általános Iskola, Makó
8. Németh Éva, 27 pont, Jedlik Ányos Gimnázium, Budapest
9. Venter Lóránd, 26 pont, Kodály Zoltán Általános Iskola, Nyíregyháza
10. Hegedűs Vera, 25 pont, Jedlik Ányos Gimnázium, Budapest
11. Győző Miklós, 24 pont, Vörösmarty Gimnázium, Budapest
12. Molnár Gábor, 21 pont, Általános Iskola, Zalalövő
    Tábith László, 21 pont, Kálvin Téri Általános Iskola, Makó
14. Lovrics Klára, 20 pont, Kőrösi Csoma S. Általános Iskola, Budapest
15. Oravecz Viktor, 19 pont, Kálvin Téri Általános Iskola, Makó
16. Marosi András, 8 pont, Kálvin Téri Általános Iskola, Makó
17. Tóth Ágnes, 5 pont, Vörösmarty Gimnázium, Budapest.

II. korcsoport (7-8. osztály)

1. Venter György, 40 pont, Krúdy Gyula Gimnázium, Nyíregyháza, felkészítő tanára: Konczné Végh Leona; dr. Kiss Sándor
2. Fodor Krisztina, 39 pont, Kálvin Téri Általános Iskola, Makó, felkészítő tanára: Mendei Ádám
3. Lenk Sándor, 38 pont, Általános Iskola, Zalalövő, felkészítő tanára: Kissné Mánfai Zita
4. Kutalik Péter, 37 pont, Berzsenyi Dániel Gimnázium, Budapest
   Végh Zoltán, 37 pont, Kálvin Téri Általános Iskola, Makó
6. Balatoni Dénes, 33 pont, Berzsenyi Dániel Gimnázium, Budapest
7. Huhn Zsófia, 30 pont, Berzsenyi Dániel Gimnázium, Budapest
8. Törőcsik Andrea, 26 pont, József Attila Gimnázium, Székesfehérvár
9. Cserepes Mária, 25 pont, Általános Iskola, Kótaj
   Varga Petra, 25 pont, Kálvin Téri Általános Iskola, Makó

11. Késmárki Péter, 15 pont, Jedlik Ányos Gimnázium, Budapest
Micskei Zoltán, 15 pont, Jedlik Ányos Gimnázium, Budapest
13. Horváth László, 10 pont, Önkormányzati Gimnázium, Csurgó
14. Bálint Nóra, 9 pont, Kálvin Téri Általános Iskola, Makó.

Néhány szép megoldást név szerint is kiemelünk a döntőből. Így az I. korcsoportban Rafael Balázs a 2. feladatra illetve Varjú Péter a 2. és 3. feladatra; a II. korcsoportban Huhn Zsófia a 3. feladatra, Kutalik Péter az 5. feladatra, Végh Zoltán a 2. feladatra és Venter György a 4. feladatra adott válasza kiemelkedően szép volt.

Köszönet jár azoknak a kollégáknak, akik a tanulókat felkészítették és támogatták a versenyen való részvételben.

Feladatok

5-6. osztály

1. Egy négyzetet az egyik oldalával párhuzamos két egyenessel három téglalapra bontunk. Ha mindegyik téglalap kerülete 24, akkor mekkora a négyzet területe?

(6 pont)

2. Egy összejövetelen 21 gyerek vett részt. Mindenkitől sorban megkérdeztem, hogy hány osztálytársa van a jelenlévők között. Elárulom az első 13 választ: öten mondtak 3-at; nyolcan pedig 4-et. Mi lehet a hiányzó 8 válasz, ha tudjuk, hogy minden gyereknek legalább egy osztálytársa jelen volt az összejövetelen?

(10 pont)

3. Hol vannak a síkon azok a pontok, amelyekre nem igaz az, hogy az egymástól 2 cm távolságra levő A és B pontoktól 2 cm-nél nem kisebb távolságra találhatók?

(10 pont)

4. Hányféleképpen lehet a 45 dominó közül kettőt kiválasztani úgy, hogy ezeket egymás mellé lehessen tenni, azaz valamelyik felükön a pontok száma megegyezzék? (A dominók egyik felén legfeljebb 8 pont található.)

(12 pont)

5. Egy építőkészlet 96 darabja kétféle anyagból (műanyag és fa), 3 méretben (kicsi, közepes és nagy), 4 színben (kék, piros, zöld, sárga) és 4 formában (kör, hatszög, négyzet, háromszög) készült, mégpedig úgy, hogy mindegyik fajtából egy található. Hány olyan darab van a készletben, amely **egy kiválasztott** „műanyag közepes nagyságú piros" darabtól pontosan két tulajdonságban tér el?

(12 pont)

7-8. osztály

1. Milyen egész szám írható az n helyére, ha azt akarjuk, hogy az alábbi kifejezés egy egész szám négyzete legyen?

$$16n^2 + 4$$

(8 pont)

2. Egy mezei futóversenyen két csapat indul 5-5 futóval. Az a futó, aki az n-edik helyen végez, n pontot szerez csapatának és az a csapat győz, amelyik összességében kevesebb pontot ér el. Ha nincs holtverseny a versenyzők között, akkor hányféle pontszámot érhet el a győztes csapat?

(10 pont)

3. Összeadtunk 1994 db egymást követő egész számot.

a) Lehet-e az összegük 1994-gyel osztható?

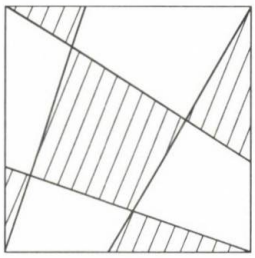
b) Lehet-e az összegük 1995-tel osztható?

(10 pont)

4. Ali baba észrevette, hogy a 40 rabló közül bármelyik néggyel is találkozik, mindig van közöttük olyan, amelyik a másik háromra haragszik. Hány rablónak lehet barátja a többiek között?

(12 pont)

5. Egy négyzetet úgy vágunk négy egyenessel részekre, hogy a keletkező háromszögek területének összege egyenlő a középső négyszög területével. Mutassuk meg, hogy ekkor a háromszögek azon oldalainak összege, amelyek a négyzet oldalára esnek, éppen a négyzet félkerületét adják.



(12 pont)

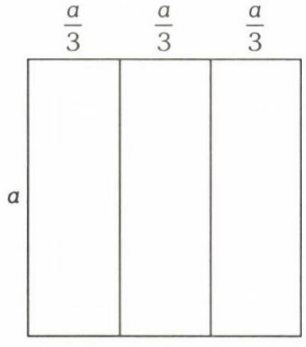
Megoldások

5-6. osztály

1. Ha az eredeti négyzet oldalát a-val jelöljük, akkor a téglalap oldalai a illetve $\frac{a}{3}$ és így a kerületére

$$2a + \frac{2a}{3} = 24$$

teljesül, amelyből $a = 9$. Tehát a négyzet területe 81 (területegység).



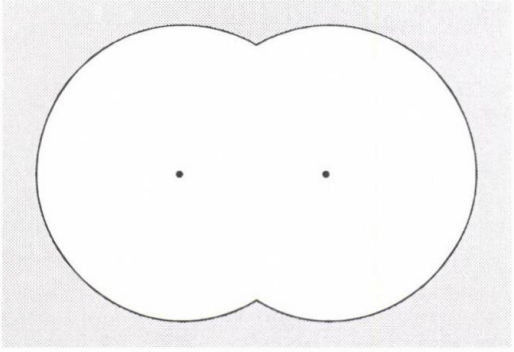
2. Ha egy gyerek válasza az, hogy 3 osztálytársa „van jelen", ez azt jelenti, hogy abból az osztályból pontosan négyen vannak az összejövetelen. Mivel azok a gyerekek, akik hármat mondtak öten vannak, így legalább 2 osztályból jöttek és legalább nyolcan vannak.

Hasonlóan látható: a négyet válaszolók is legalább két osztályból jöttek és minimum tízen vannak. Tehát azt tudjuk, hogy legalább 4 osztályból minimum tizennyolcan vannak jelen.

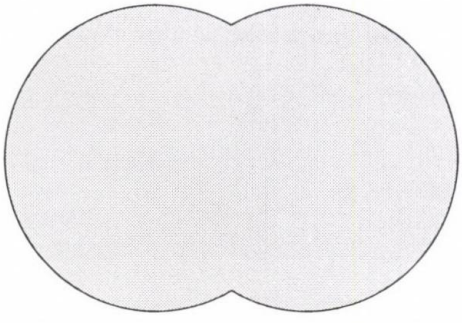
A feltevés szerint mindenkinek legalább egy osztálytársa ott van, ezért a „maradék" $21 - 18 = 3$ gyerek egy osztályba jár.

A hiányzó nyolc válasz tehát: hárman kettőt; hárman hármat és ketten négyet mondtak.

3. A „2 cm-nél nem kisebb távolságra" kitétel azt jelenti, hogy pontosan 2 cm-re vagy annál messzebbre fekvő olyan pontokat keresünk, melyekre ez mind az A, mind a B pontra nézve teljesül. Ezek pedig azok a pontok lesznek, amelyeket a rajzon megjelöltünk.



Amelyekre ez nem teljesül, azok a második ábrán láthatók. (Figyelem: a körvonal nem tartozik a keresett halmazhoz!)



4. A dominók egyik felén kilencféle pontszám szerepelhet (0-tól 8-ig). Az első kiválasztott dominó 45-féle lehet. Ezekből 9 „dupla"

(azaz mind a két felén ugyanaz a pontszám szerepel) és 36 a „vegyes" (eltérők a pontszámok).

Ha az első dominó dupla, akkor nyolc másik illeszkedik hozzá (mivel egy-egy pontszám összesen 10-szer fordul elő a dominókon). Ha viszont az első dominó vegyes, akkor $2 \cdot 8 = 16$ dominó választható másodiknak, mert vagy a bal oldalhoz vagy a jobb oldalhoz illeszkedhet.

Az összes választási lehetőség 648, mivel

$$9 \cdot 8 + 36 \cdot 16 = 648.$$

5. Az „egy kiválasztott" kitétel azt jelenti, hogy a kiválasztott darab formája is adott. Vegyük figyelembe azt is, hogy ha egy tulajdonság n-féle, akkor az eredeti darab ezen tulajdonságától $n - 1$ esetben lehet eltérés.

Mivel négyből a(z eltérő) kettő hatféleképpen választható ki, így a következő esetek lehetségesek:

Eltérő tulajdonság		Lehetőség
Anyag	Méret	$1 \cdot 2 = 2$
Anyag	Szín	$1 \cdot 3 = 3$
Anyag	Forma	$1 \cdot 3 = 3$
Méret	Szín	$2 \cdot 3 = 6$
Méret	Forma	$2 \cdot 3 = 6$
Szín	Forma	$3 \cdot 3 = 9$

Tehát 29 olyan darab van, amely pontosan két tulajdonságban tér el a kiválasztott darabtól.

7-8. osztály

1. Nyilván

$$16n^2 + 4 = 4(4n^2 + 1) = 4[(2n)^2 + 1].$$

Mivel a 4 négyzetszám, ezért a $(2n)^2 + 1$ kifejezés – vagyis egy négyzetszám plusz egy – is négyzetszám. Ez pedig csak $n = 0$ esetén van így, mert ellenkező esetben

$$(n + 1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = \\ = 2n + 1 > 1.$$

Tehát a $16n^2 + 4$ kifejezés csak $n = 0$ esetén lesz négyzetszám és értéke ekkor 4.

2. Mivel nem volt holtverseny, ezért a kiosztott pontok összege $1 + 2 + \ldots + 10 = 55$. Tehát a győztes csapat pontjainak összege legfeljebb $\left[\frac{55}{2}\right] = 27$. Másrészt a győztes csapat biztosan szerez legalább $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ pontot.

Ezért a győztes csapat által szerezhető összes pont 15, 16, ..., 27 – vagyis 13-féle lehet. Egyszerűen ellenőrizhető: ezen pontszámok bármelyike létrejöhet.

3. Legyen a egy tetszőleges egész szám és jelölje

$$a - 996; \ldots; a - 1; a; a + 1; \ldots; a + 997$$

az egymás utáni 1994 darab egész számot. Ezek összege:

$$(a - 996) + (a - 995) + \ldots + (a - 1) + a + \\ + (a + 996) + (a + 995) + \ldots + (a + 1) + \\ + (a + 997) = 1994a + 997.$$

Ebből látszik: az összegük nem osztható 1994-gyel.

A második kérdésre igen a válasz. Ehhez elegendő egyetlen példát adni.

Legyen $a = 997$ és ekkor az összeg

$$1994 \cdot 997 + 997 = 1995 \cdot 997.$$

4. Ha minden rabló haragudna mindenkire, akkor nem lehetne egyetlen rablónak sem „cimborája" a másik. Tegyük fel tehát , hogy van legalább két olyan rabló, akik nem haragszanak egymásra. Jelölje ezeket A és B!

Vegyünk most tetszőlegesen 4 rablót – akik között szerepel A és B.

Jelölje ezeket A, B, X és Y!

A feltevés szerint ezek közül az egyik haragszik a másik háromra.

Tegyük fel, hogy X haragszik a többire! (Sem A, sem B nem lehet a „haragos", mert feltettük, hogy – kölcsönösen – nem haragszanak egymásra.)

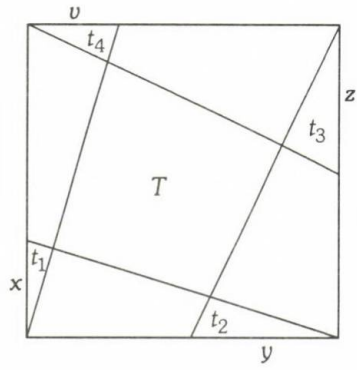
Ha Y helyett bárkit választunk az A, B, X és Z csoportban, X „haragosa" Z-nek is. Tehát az X mindenkivel „haragban van".

Mivel bármely 4 rabló között – amelyekben A és B is megtalálható – van olyan, aki az összes többire haragszik, ezért A-n és B-n kívül

legfeljebb egy olyan rabló lehet, aki nem haragszik mindenkire. Tehát legfeljebb három rablónak lehet barátja a többiek között.

5. Ha a négyzet oldala a, akkor – az ábra jelöléseit figyelembe véve – azt kell igazolnunk, hogy

$$x + y + z + v = 2a.$$



Tekintsük azokat a derékszögű háromszögeket, amelyeknek egyik befogója a, a másik befogója x, y, z illetve v. Ezek a négyzetből a T négyszöget egyszer sem, a t_1, t_2, t_3 illetve t_4 háromszögeket kétszer, a többit pedig egyszer fedik le. A feltételt is figyelembe véve:

$$\frac{ax}{2} + \frac{ay}{2} + \frac{az}{2} + \frac{av}{2} = a^2.$$

Rendezés után kapjuk, hogy

$$\frac{a}{2}(x + y + z + v) = a^2,$$

így

$$x + y + z + v = 2a.$$

Versenyfelhívás a 11-14 éves korú tanulók részére az 1995/96-os tanévre

Folyóiratunk hasábjain a 95/96-os tanévben is ORSZÁGOS Feladatmegoldó Versenyt hirdetünk 5-6. oszt. és 7-8. oszt tanulók részére.

Az előző évek gyakorlatához képest annyiban változik a verseny felépítése, hogy megyei fordulókat is beiktatunk, amelyek 1996 áprilisában kerülnek megrendezésre.

Így az országos döntőbe (1996. június első szombatja)

- meghívjuk a levelezős fordulók első 12 helyezettjét és a
- megyei versenyek 1. és 2. helyezettjét (ez független a levelezős versenytől)

A LEVELEZŐS FORDULÓK feladatait 3 egymás utáni lapszámban jelentetjük meg, amelyek megoldásait a megjelenést követő hónap utolsó napjáig (postabélyegző dátuma) kell beküldeni, tehát a – szeptemberi forduló feladatmegoldásait **1995. október 31**-ig; novemberi forduló feladatmegoldásait **1995. december 31**-ig; januári forduló feladatmegoldásait **1996. február 28**-ig.

A levelező verseny nevezési díja **700** Ft/fő, melyet postautalványon kérjük feladni **1995. október 31**-ig. Egy csekken több tanuló nevezési díja is befizethető, ez esetben nyomtatott betűkkel a tanulók nevét a csekk hátoldalán fel kell tüntetni.

Kérjük, hogy az első forduló feladatainak megoldásával egyidejűleg a folyóirat utolsó oldalán lévő nevezési lapot (vagy annak fénymásolatát) lepecsételve, a befizetési csekk másolatával együtt küldjék el a következő címre:

MOZAIK Oktatási Stúdió
Feladatmegoldó Verseny
6701 Szeged, Pf.: 301.

Formai követelmények: minden feladatot külön lapon kérünk beküldeni. Felhívnánk a fi-

gyelmet arra, hogy a beküldött feladatmegoldások **minden lapján**! szerepeljen a versenyző neve, az iskola pontos neve és címe, mert anélkül nem tudjuk a pontszámokat összesíteni.

A harmadik forduló után, várhatóan 1996. március 18-tól, lehetőség van arra, hogy a tanulók a 62-312-988-as telefonszámon érdeklődjenek Kain Mihálynál elért pontszámaikról.

A **megyei fordulók** szervezéséhez várjuk a kollégák jelentkezését. A lebonyolításhoz ajánlott feladatokat tudunk küldeni, de abban a megyében, ahol már kialakult hagyományai vannak a tantárgyi versenyeknek, természetesen elfogadjuk a helyi anyagra épülő megyei verseny első két helyezettjét az **országos döntőre**, melyet 1996. június első szombatján tartjuk Szegeden.

Kérjük a kollégákat, amennyiben szerveznek megyei versenyeket és neveznek 2 versenyzőt az országos döntőre, a szervező nevével és telefonszámával küldjék el jelentkezésüket 1995. október 31-ig a szerkesztőség címére.

Kitűzött feladatok 11-12 éveseknek (5-6. osztályosoknak)

95.17. *a)* A 0-tól különböző 9 számjegy mindegyikét pontosan egyszer használtuk fel a következő egyenlőségben:

$$39 \cdot 4 = 78 \cdot 2 = 156.$$

Keress még ilyen tulajdonságú egyjegyű, kétjegyű és háromjegyű számokat!

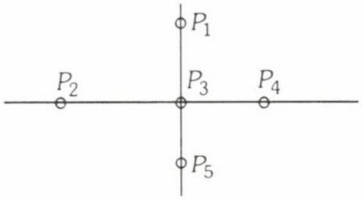
b) Mind a tíz számjegyet pontosan egyszer használtuk fel a következő egyenlőségben:

$$39 \cdot 402 = 15\,678.$$

Keress még további ilyen kétjegyű, háromjegyű és ötjegyű számokat!

95.18. Egy diák megtakarított pénzét összegyűjti. Januárban félretett valamennyi forintot, februárban valamivel kevesebbet. Ezután azonban minden hónapban félre tudott tenni annyi forintot, mint az előző két hónapban együttvéve. Így végül decemberben már 1050 forintot tudott félretenni. Mennyi pénzt tett félre januárban és februárban?

95.19. Öt pontot például a következő módon helyezhetünk el a síkban úgy, hogy semelyik 4 pont se legyen egy egyenesen, és a lehető legtöbb egyenest kapjuk, amely 3 adott ponton megy át:



Így két egyenest kaptunk.

Hogyan helyezzünk el a síkon 6 pontot úgy, hogy közülük semelyik 4 se legyen egy egyenesen, de a lehető legtöbb olyan egyenest kapjuk, amely az adott 6 pont közül 3-3 pontot tartalmaz?

Oldjuk meg a megfelelő feladatot 7, 8 és 9 pont esetére is!

95.20. Elemezzük a következő játékot. Egy halomban van 11 gyufaszál. Ketten, *A* és *B* felváltva vesznek belőle, legalább egyet és legfeljebb 3-at. A kezd. Az győz, akinek a játék végén (amikor a halomból már elfogytak a gyufák) páros számú gyufája gyűlt össze.

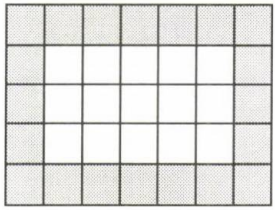
A-nak vagy *B*-nek van nyerő stratégiája (azaz ki tud az ellenfél bármelyik lépésére mindig úgy válaszolni, hogy a végén ő győzzön)?

Elemezd a játékot akkor is, ha induláskor 11 helyett 9 gyufaszál van a halomban!

Kitűzött feladatok 13-14 éveseknek (7-8. osztályosoknak)

95.21. „Kockás" papíron megrajzoltunk egy téglalapot és beszíneztük a téglalap vonalának „belső szélén" álló kis négyzeteket. Melyek azok a téglalapok, amelyekre igaz, hogy ugyanannyi a beszínezett kis négyzetek száma,

mint a téglalap belsejében fehéren maradó kis négyzetek száma?



95.22. Az ABC egyenlő szárú háromszög AB alapján fekvő csúcsaiból induló AD és BE szögfelezők az O pontban metszik egymást. Az O, B és D pontokon áthaladó kör K középpontja az AB alapon van. Számítsuk ki az ABC háromszög szögeit!

95.23. Egy táblára felírtuk a pozitív egész számokat 1-től 1994-ig. Ezután bármely két olyan számot, ami a táblán van, letörölheüirik, ha helyettük felírjuk a táblára a két szám különbségének abszolút értékét. Előfordulhat-e, hogy véges sok lépés után egyedül a 0 szám maradjon a táblán?

95.24. A koordináta-rendszer egész koordinátájú pontjain (rácspontjain) ketten, A és B felváltva lépnek egy bábuval. A mindig „felfelé" léphet 1, 2 vagy 3 egységet, B mindig csak „jobbra" 1, 2 vagy 3 egységet. A bábu kezdéskor a (0, 0) ponton áll és A kezd. Addig léphetnek, amíg a bábu az $x + y = 11$ egyenletű egyenesre nem ér, ekkor vége a játéknak. Ha a bábu olyan pontban ért az egyenesre, amelynek y koordinátája páros, A nyer, ha olyan pontban, amelynek x koordinátája páros, B nyer. Kinek van nyerő stratégiája?

Elemezzük a játékot akkor is, ha az $x + y = 9$ egyenletű egyenes pontjai alkotják a célt!

A megoldásokat a következő címre kérjük beküldeni:

MOZAIK Oktatási Stúdió
6723 Szeged. Pf. 301.

A borítékra kérjük, írják rá: Matematika feladatmegoldó pontverseny.
A beküldési határidő: **1995. november 30.**

Az 1994/95. évi matematika feladatmegoldó pontverseny IV. fordulójában kitűzött feladatok megoldása

(A feladatok szövege az 1995/2. szám 25. oldalán olvasható.)

95.9. Feltehetjük, hogy A a legkisebb számjegy és D a legnagyobb. Az $A = 1$ választás nem jó, túl kis számot kapunk. Ha $A = 2$, akkor $\overline{ABCD} = 2345$, így $2345 + 5432 = 7777$ és $12\,300 - 7777 = 4523$, tehát ez jó, hiszen ebben is a 2, 3, 4, 5 számjegyek szerepelnek. Az $A = 3$ vagy 4, 5 választás már túl nagy számokat eredményez. Az egyetlen megoldás tehát az $A = 2$, $B = 3$, $C = 4$, $D = 5$.

95.10. Számoljuk össze először azt, hány különböző színelosztás lehetséges a kocka lapjain! Mivel mindegyik színt fel kell használni, egy színből legfeljebb 4 lap fordulhat elő. Mivel a 4 azonos színű lap lehet piros, kék és zöld is (a többi színből 1-1 marad) ez 3 lehetőség. Ha 3 lap azonos színű, akkor a másik két színből 2 lap, illetve 1 lap van, ez összesen 6 lehetőség.

Végül, ha minden színből 2 lap van, ez egy lehetőség.

Ezután azt nézzük végig, hogy az egyes színelosztásokat hányféle módon lehet a kocka lapjain elhelyezni.

Ha 4 azonos színű lap van, akkor azt könnyű megfigyelni, hogy a másik két színű lap hogy helyezkedhet el. Tegyük fel például, hogy 4 lap piros, 1 kék és 1 zöld! Ekkor a kék és zöld színű lap vagy egymással szemben helyezkedik el (nincs közös élük), vagy egymás mellett (van közös élük), tehát 2 mód van az elhelyezésükre. A piros lapok helyzete ezután már egyértelmű. Azt kaptuk tehát, hogy ha 4 lap színe azonos, akkor összesen $2 \cdot 3 = 6$ módon lehet kifesteni a kockát.

Ha például 3 lap piros, 2 lap kék és 1 lap zöld, akkor itt is először rögzítjük a zöld lap helyzetét. A 2 kék lap a zöldhöz képest háromféle módon helyezkedhet el. Vagy a zöld lappal szemben van az egyik kék lap (a másik mellette), vagy a kocka egyik csúcsában illeszkedik egymáshoz a zöld és a kék lap, végül a két kék lap szemközti és a zöld mindkettőhöz egy-egy éllel csatlakozik.

Hasonló módon a 3, 2, 1 színelosztás mindegyikét 3 módon lehet a kockán elhelyezni, így összesen $3 \cdot 6 = 18$ módon lehet kifesteni a kockát.

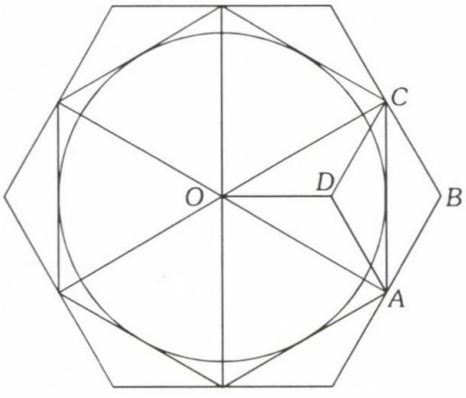
Végül nézzük azokat az eseteket, amikor minden színből 2 lap van! Ezt összesen hatféleképpen lehet elhelyezni. Egy lehetőség, ha mind a 3 azonos színű lappár szemköztes. Három lehetőség van arra, hogy 1 azonos színű lappár szemköztes, a másik kettő nem. Végül 2 lehetőség van arra, ha nincs azonos színű szemközti lappár, az egyik színezés a másiknak síkra vonatkozó tükörképe. Összesen tehát $6 + 18 + 6 = 30$ lehetőség van.

95.11. Jelöljük t-vel az A és B pontok távolságát! Az előző feltétel szerint, amíg a gyorsabb kerékpáros $t + 10$ km-t tesz meg, addig a lassúbb $t - 10$ km-t. A második találkozásig a gyorsabb $2t + \frac{t}{3} = \frac{7}{3}t$ km-t, a lassabb $2t - \frac{t}{3} = \frac{5}{3}t$ km-t tett meg. Így a sebességük aránya 7 : 5. Mivel a sebességük állandó, az első találkozásig megtett utak aránya is 7 : 5, tehát $(t + 10) : (t - 10) = 7 : 5$. Ebből azt kapjuk, hogy $t = 60$ km.

95.12. A négyzet oldalain összesen 12 pontot vettünk fel. Számoljuk össze, ebből a 12 pontból hányféleképpen választhatunk ki 3 pontot! Ha a sorrendet is figyelembe vesszük, akkor az első pontot 12-ből, a másodikat 11-ből, a harmadikat 10-ből választhatjuk. Így összesen $12 \cdot 11 \cdot 10$ lehetőség adódik. A sorrend azonban nem számít, ezért ezt 6-tal el kell osztani: $\frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{6} = 220$. A kapott eredményből még ki kell vonni azokat az eseteket, amikor a 3 kiválasztott pont egy oldalon van (nem keletkezik háromszög), ez 4 eset.

A háromszögek száma tehát $220 - 4 = 216$.

95.13. Az ábrán látható módon érdemes megrajzolni a körbe és a kör köré írt szabályos hatszöget. A kör köré írt hatszög oldalainak érintési pontjai legyenek a körbe írt hatszög csúcsai. Elég meghatározni az $OABC$ deltoid és OAC háromszög területének arányát, hiszen mindegyik a megfelelő hatszög területének hatod része. A D az OAC szabályos háromszög középpontja, így ACD olyan egyenlő szárú háromszög, amelynek alapon fekvő szögei 30°-osak. Mivel az érintő merőleges az érintési ponthoz húzott sugárra, az ABC egyenlő szárú háromszög alapon fekvő szögei is 30°-osak. Így az ABC és ADC háromszögek egybevágók.



Az ADC háromszög területe az AOC háromszög területének $\frac{1}{3}$-a, ezért az $AOCB$ deltoid és AOC háromszög területének aránya 4 : 3 és ugyanennyi a kör köré és a körbe írt hatszög területének aránya.

95.14. Mivel a szorzat osztható 1000-rel és $1000 = 8 \cdot 125 = 2^3 \cdot 5^3$, legalább az egyik tényező páros és legalább az egyik tényező osztható 5-tel. Mivel egy 5-tel osztható szám 0-ra vagy 5-re végződik, de egy négyjegyű, 0-ra végződő szám jegyeit fordított sorrendbe írva legfeljebb háromjegyű számot kapunk, az öttel osztható tényező csak 5-re végződhet, így páratlan. Tehát a másik tényező – ami szintén nem végződhet 0-ra – 8-cal osztható, az 5-tel osztható tényező pedig 125-tel is osztható.

A 125-tel osztható páratlan számok utolsó három számjegye csak 125, 375, 625 és 875 lehet. Így az egyik tényező utolsó három számjegyeként csak a felsorolt 4 szám jöhet szóba. Az első számjegyet úgy kell megválasztanunk, hogy a számjegyek fordított sorrendbe írásával kapott 4-jegyű szám osztható legyen 8-cal. Ezek alapján a következő 4-jegyű számokat kapjuk:

6125,
6375,
4625,
4875.

A kapott számok valóban megoldások, mert:

$6125 \cdot 5216 = 31\,948\,000,$
$6375 \cdot 5736 = 36\,567\,000,$
$4625 \cdot 5264 = 24\,346\,000,$
$4875 \cdot 5784 = 28\,197\,000.$

95.15. Jelöljük a nyolcadikos versenyzők számát n-nel! Az összes mérkőzések számát így számolhatjuk ki: az n nyolcadikos egymás között $\frac{n(n-1)}{2}$ partit játszott, a hetedikesek egymás között 1-et és végül minden nyolcadikos minden hetedikessel, ez $2n$ parti. Összesen tehát

$$\frac{n(n-1)}{2} + 2n + 1 = \frac{n(n+3)}{2} + 1$$

partit játszottak.

A nyolcadikosok által gyűjtött összes pontszám egyenlő a kiosztott összpontszám (azaz a partik száma) mínusz a hetedikesek által gyűjtött pontok száma:

$$\frac{n(n+3)}{2} + 1 - 8 = \frac{n(n+3)}{2} - 7.$$

Ha minden nyolcadikos k pontot gyűjtött, akkor tehát

$$nk = \frac{n(n+3)}{2} - 7,$$

amiből

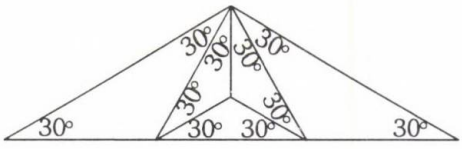
$$k = \frac{n+3}{2} - \frac{7}{n}.$$

Mivel k vagy egész szám, vagy egy egész szám meg egy fél lehet, így $n = 7$ vagy $n = 14$ jöhet csak szóba. Ha $n = 7$, akkor $k = 4$, ha $n = 14$, akkor $k = 8$.

A nyolcadikos versenyzők tehát 7-en vagy 14-en lehettek.

A feladat megoldásához már nem tartozik hozzá, de könnyű belátni, hogy az $n = 7$ esetben összesen 9 versenyző volt, mindenki 8 partit játszott le, és ha például minden parti döntetlenül végződött, akkor mindenki 4 pontot gyűjtött. Ezzel az összes feltétel teljesül.

95.16. A következő ábráról a megoldás könnyen leolvasható.



Feladatrovat tanároknak

Rovatvezető: **Kosztolányi József**

A megoldásokat kérjük a rovatvezető címére küldjék: 6721 Szeged, Pusztaszeri u. 17. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljék. Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak a megoldásait is) külön lapra írják tollal vagy írógéppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsák össze, és külső felére írják rá a feladat számát és a megoldó nevét! Csatoljanak a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat a kitűzést követő negyedik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük. **Beküldési határidő:** 1995. november 30.

49. Egy kilenctagú társaságban bármely három ember között van kettő olyan, akik ismerik egymást. Igaz-e, hogy ekkor van a társaságnak öt olyan tagja, hogy mindegyikük legalább négyet ismer a többiek közül? (Az ismeretség kölcsönös.)

Szőkefalvi-Nagy Gyula Mat. Emlékverseny 1994-95.

50. Igazoljuk, hogy bármely x, y valós szám esetén

$$(x^2+5)(y^2+5) \geq 12(x+y)+12$$

Mikor áll fenn egyenlőség?

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

51. Mutassuk meg, hogy bármely háromszögben

$$a^2+b^2+c^2 \geq 4\sqrt{3}T \max\left\{\frac{s_a}{m_a}; \frac{s_b}{m_b}; \frac{s_c}{m_c}\right\},$$

ahol T a háromszög területe; a, b, c az oldalak, s_a; s_b; s_c a súlyvonalak, m_a; m_b; m_c pedig a magasságok hosszát jelöli.

Bencze Mihály, Brassó

52. Bizonyítsuk be, hogy

$$\int_0^{\pi} \frac{\sqrt{\sin x}}{x}\,dx < 2+\ln\pi\,!$$

Kovács Béla, Szatmár

53. Vannak-e olyan p és q valós együtthatós polinomok, amelyekre a

$$\frac{d(1)+d(2)+\ldots+d(n)}{n} = \frac{p(n)}{q(n)}$$

egyenlőség minden pozitív egész n esetén teljesül? ($d(n)$ az n pozitív egész szám pozitív osztóinak a számát jelöli.)

Csete Lajos, Markotabödöge

54. Határozzuk meg az összes olyan háromszöget, amelyekben az oldalak hossza pozitív egész szám, az egyik oldal egységnyi hosszú, a másik két oldal valamelyikével szemközti belső szög tangense pedig egyenlő a másik két belső szög tangensének számtani közepével!

Szabó Kálmán, Miskolc

Feladatmegoldások (31-36. feladatok)

31. Ketten felváltva helyeznek el a sakktáblán egyforma sakkfigurákat, a játékot kezdő Viktor világosakat, a másodhúzó Orbán sötéteket (az egyforma bábukból kellően sok áll rendelkezésükre). A játékot elveszíti az, aki

már nem tud úgy saját színű figurát lerakni, hogy a másik által korábban letett figura ne ütné.

Viktor vagy Orbán nyer, ha a bábuk

a) bástyák,

b) futók,

c) huszárok?

Blázsik Zoltán, Szeged

Megoldás: Mindhárom esetben a másodhúzó Orbán nyer.

Ennek igazolása végett – figyelembe véve a sakktábla szerkezetét és az egyes bábuk lépési lehetőségeit – a következő megállapítások tehetők:

1. A tábla középpontjára szimmetrikusan elhelyezett két bástya nem ütheti egymást, ugyanis különböző sorban és különböző oszlopban helyezkednek el.

2. A tábla két oldalára merőleges szimmetriatengelyére szimmetrikusan elhelyezett két futó nem ütheti egymást, ugyanis különböző színű mezőkön állnak.

Ezek alapján Orbán akkor játszik jól, ha mindig Viktor lépésének szimmetrikus megfelelőjét lépi, az *a)* esetben középpontosan, a *b)* esetben tengelyesen valamelyik oldalfelező tengelyre vonatkozóan, a *c)* esetben pedig mindkét stratégiát alkalmazhatja, hiszen a huszár nem ütheti saját mezejének sem a középpontos, sem a tengelyes szimmetrikusát. Tekintettel arra, hogy a tábla páros számú mezőből áll, Orbán mindig nyerhet.

András Szilárd, Csíkszereda
Tóth Sándor, Sárospatak

A megoldók száma: 5.

32. A háromszög súlypontján áthaladó egyenes a háromszöget két részre vágja. Mely egyenesekre lesz e két rész területének a különbsége

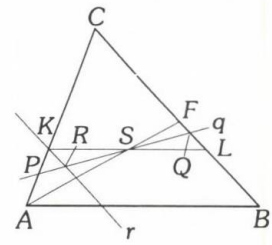
a) minimális,

b) maximális?

Mekkora ez a minimum illetve maximum, ha a háromszög területe t?

Jakucs Erika, Budapest

I. megoldás:



1. ábra

Legyen az ABC háromszög súlypontja S, a BC oldal felezési pontja F! Ha a tekintett egyenes illeszkedik a háromszög egyik csúcsára, akkor ez éppen a kiszemelt csúcshoz tartozó súlyvonal, ez pedig két egyenlő területű részre osztja a háromszöget. A két rész területének különbsége tehát ebben az esetben lesz minimális.

A maximum meghatározása végett húzzunk S-en át párhuzamost AB-vel, messe ez az oldalakat az ábrának megfelelően a K és az L pontokban! Az ABC háromszög hasonló a KLC háromszöghöz, a hasonlóság aránya $3 : 2$, így $t_{ABC} : t_{KLC} = 9 : 4$.

A feladat szempontjából elegendő azokkal az S ponton átmenő q egyenesekkel foglalkozni, amelyek az AC oldalt A és K között metszik. Legyen ez a metszéspont P! Ekkor q a BC oldalt az F és az L közötti Q pontban metszi. Legyen a K ponton átmenő, BC-vel párhuzamos egyenes r, r és q metszéspontja R! A KSR háromszög egybevágó az LSQ háromszöggel, ugyanis oldalaik páronként párhuzamosak és $KS=SL$. Ezért

$$t_{PCQ} = t_{KCL} + t_{KPR} \quad \text{és} \quad t_{ABQP} = t_{ABLK} - t_{KPR}.$$

Ezek alapján a vizsgálandó különbség:

$$t_{ABQP} - t_{PCQ} =$$

$$= \frac{5}{9} t_{ABC} - t_{KPR} - \left(\frac{4}{9} t_{ABC} + t_{KPR} \right) = \frac{1}{9} t - 2t_{KPR}.$$

Ez nyilván akkor maximális, ha $t_{KPR} = 0$, azaz q azonos a KL egyenessel.

Csorba Ferenc, Győr

II. megoldás: Ha a súlyponton átmenő egyenes nem súlyvonal, akkor a háromszöget egy négyszögre és egy háromszögre bontja. A két rész területének különbsége akkor lesz maximális, ha a levágott háromszög területe minimális. Ismert tény, hogy egy szögtartomány belsejében adott ponton keresztül húzott egyenessel úgy vágunk le legkisebb területű részt a szögtartományból, ha az egyenes szárak közötti szakaszát az adott pont felezi. (Lásd pl. Gyapjas – Reiman: Elemi matematikai feladatgyűjtemény I. XVIII. fejezet 2. feladat) Ha a háromszög csúcsainál lévő szögtartományokat és a súlypontot tekintjük, akkor ezek az egyenesek éppen párhuzamosak a háromszög szemközti oldalaival. Minthogy az így kapott kis háromszög hasonló az eredeti háromszöghöz, és a hasonlóság aránya 2 : 3, ezért a kis háromszög területe $\frac{4}{9}t$, a maximális különbség pedig $\frac{t}{9}$.

Blázsik Zoltán, Szeged

A megoldók száma: 12.

33. Egyenlő szárú-e az a háromszög, amelynek két szögére az

$$1-2\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{y}{2}}=\operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{y}{2}?$$

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

I. megoldás: Be fogjuk látni, hogy a háromszög egyenlő szárú, ugyanis két x nagyságú szöge van.

Háromszögről lévén szó ($0 < x$; $y < 180$), a feladatbeli kifejezések értelmezve vannak. A bizonyítás során fel fogjuk használni a következő trigonometrikus összefüggéseket:

$$\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2};\qquad \cos^2\frac{y}{2}=\frac{1+\cos y}{2};$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{\sin x};\qquad \operatorname{tg}\frac{y}{2}=\frac{\sin y}{1+\cos y}.$$

Ezek beírása és a megfelelő műveletek elvégzése után kapjuk, hogy

$$2\sin x\cos y+\sin x\cos y+\cos x\sin y-$$
$$-(\sin x+\sin y)=0.$$

Ebből

$$\sin 2x+\sin(x+y)-(\sin x+\sin y)=0.$$

Alkalmazva a szögfüggvények szorzattá alakítására vonatkozó összefüggéseket adódik, hogy

$$2\cos\frac{x-y}{2}\sin\frac{3x+y}{2}-2\cos\frac{x-y}{2}\sin\frac{x+y}{2}=0,$$

azaz

$$\cos\frac{x-y}{2}\left(\sin\frac{3x+y}{2}-\sin\frac{x+y}{2}\right)=0. \qquad (1)$$

A feltételek miatt $\cos\frac{x-y}{2}\neq 0$, tehát (1) csak $\sin\frac{3x+y}{2}=\sin\frac{x+y}{2}$ esetén teljesül. Mivel $3x+y$ és $x+y$ különbözőek, ezért a

$$\frac{3x+y}{2}=180^\circ-\frac{x+y}{2}$$

egyenletnek kell teljesülni, vagyis $y = 180^\circ - 2x$, ami azt jelenti, hogy a háromszög harmadik szöge is x, tehát a feltétel teljesülése esetén a háromszög egyenlő szárú.

László Sándor, Szombathely

II. megoldás: Jelöljük az x szöggel szemközti oldalt a-val, az y-nal szemköztit b-vel, a harmadik oldalt pedig c-vel! Ilyen jelölés mellett érvényesek a következő összefüggések (lásd pl. Reiman István: Matematika. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 304-305. oldal):

$$\sin\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}};\qquad \cos\frac{y}{2}=\sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}};$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}};\qquad \operatorname{tg}\frac{y}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}},$$

ahol s a háromszög félkerületét jelöli.

Ezeket az összefüggéseket a feladatban adott egyenletbe helyettesítve kapjuk:

$$1-2\frac{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}{\frac{s(s-b)}{ac}}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-a)(s-c)^2}{s^2(s-a)(s-b)}}.$$

Rendezés és a lehetséges egyszerűsítések elvégzése után kapjuk:

$$bc-2as+2ac=0,$$

s kifejezését behelyettesítve és az így kapott kifejezést szorzattá alakítva kapjuk, hogy

$$(c-a)(b+a)=0,$$

ebből pedig adódik, hogy $a=c$, azaz a háromszög egyenlő szárú.

Horváth Géza, Zselíz
Mészáros József, Galánta

III. megoldás: A feladatban szereplő egyenlet ekvivalens átalakításokkal a

$$\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{2}\right)\cos\frac{y}{2}=2\sin^2\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$$

alakra hozható, amiből a szorzatra vonatkozó összefüggést alkalmazva adódik, hogy

$$\cos\left(y+\frac{x}{2}\right)=4\sin^2\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}.$$

Mivel $0<y+\frac{x}{2}<180°$ és ezen az intervallumon a koszinuszfüggvény szigorúan csökkenő, ezért y egyértelműen írható fel x függvényeként úgy, hogy a fenti egyenlet igaz legyen. Másrészt viszont könnyen látható, hogy az $y=180-2x$ kielégíti az egyenletet. A háromszögnek tehát két x nagyságú szöge van, azaz egyenlő szárú.

Blázsik Zoltán, Szeged

A megoldók száma: 12.

34. Mely pozitív egész n értékekre lesz a

$$p_n=2^{f_n}+1$$

prímszám, ha f_n az n-edik Fibonacci-szám ?

Ambrus Gabriella, Budapest

Megoldás: Ismert, hogy ha 2^k+1 prím, akkor $k=0$ vagy $k=2^l$, ahol l természetes szám. (Ha k-nak lenne 1-től különböző páratlan osztója, akkor 3 osztója lenne a kifejezésnek.) A Fibonacci-sorozat rekurzív definíciójából teljes indukcióval könnyen adódik az is, hogy a sorozatnak csak minden harmadik tagja páros. Elegendő tehát $n=3m$ (m pozitív egész) esetén vizsgálni a feladatban szereplő sorozat tagjait. Az n-edik Fibonacci-szám

$$f_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}.$$

(Lásd pl. Török Judit: A Fibonacci-sorozat, Tankönyvkiadó, Budapest, 1984.) Így

$$f_{3k}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k\right]^3-\left[\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right]^3\right\}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right]\cdot$$

$$\cdot\left[5\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right)^2+3\cdot(-1)^k\right],$$

azaz

$$f_{3k}=f_k(5f_k^2+(-1)^k\cdot 3).$$

A megoldás elején tett megjegyzések alapján könnyen látható, hogy $f_1=f_2=1$, $f_3=2$, $f_6=8$ esetén prímet kapunk, nevezetesen a 3, az 5 és a 257 prímeket.

Ha $k\geq 3$, akkor elegendő csak a $k=3s$ (s pozitív egész) alakú prímeket vizsgálni, ugyanis más esetekben f_k nem páros. Ekkor

$$f_{3k}=f_{9s}=f_{3s}[5f_{3s}^2+(-1)^{3s}\cdot 3].$$

Itt f_{3s} páros, $(-1)^{3s}\cdot 3$ páratlan, a szögletes zárójelben álló kifejezés 1-nél nagyobb páratlan szám, így f_{3k} nem kettőhatvány.

Azt kaptuk tehát, hogy a fentebb felsoroltakon kívül nincs több p_n prímszám.

Csorba Ferenc, Győr

Megjegyzés: Annak bizonyítására, hogy az f_{3k} alakú Fibonacci-számok között $k > 2$ esetén nincs több kettőhatvány, felhasználhatók például a következő összefüggések is:

$$f_{3n} = f_{n+1}^3 + f_n^3 - f_{n-1}^3, \qquad n = 2, 3, 4, \ldots;$$

$$f_{m+n} = f_{m-1}f_n + f_m f_{n+1}, \qquad m, n = 2, 3, 4, \ldots;$$

(Lásd pl. Róka Sándor: 1000 feladat az elemi matematika köréből, Typotex, Budapest, 1992.)

Tóth Sándor, Sárospatak
Blázsik Zoltán, Szeged

A megoldók száma: 9.

35. Az egysejtű időegységenként meghal, vagy kétfelé osztódik. Ha az n-edik időegység eltelte után él utódja, akkor ez az n-edik generáció tagja. Mutassuk meg, ha az ősanya egysejtűtől számított n-edik generációban van élet minden n-re, akkor e nemzetségnek nem szakad magja !

Pósa Lajos, Budapest

Megoldás: A feltétel azt jelenti, hogy végtelen sok osztódás során végtelen sok egysejtű születik. Az osztódás úgy értendő, hogy egy sejtnek egyetlen (közvetlen) őse, és két leszármazottja van. Ahhoz, hogy igazoljuk az állítást, meg kell adnunk egy végtelen „egysejtű-sorozatot" úgy, hogy első tagja az ősanya, s minden tag előtt a közvetlen őse, utána pedig valamelyik utódja áll. A sorozatot rekurzióval adjuk meg.

Jelölje a_0 az ősanyát, és tegyük fel, hogy már képeztük a sorozat első k tagját: a_0, a_1, ..., a_{k-1} a feltételeknek megfelelő ($k > 0$ tetszőleges egész). a_k legyen a_{k-1}-nek az az utódja, amelyiknek végtelen sok további (nem csak közvetlen) leszármazottja van. a_{k-1} két utódja közül az egyik biztosan ilyen, hiszen a_{k-1} után még végtelen sok egysejtű születik. Ha mindkét utód ilyen, akkor bármelyiket választhatjuk.

Mivel k tetszőleges pozitív egész volt, ezért a fenti módon definiáltunk egy végtelen hosszú „vérvonalat", tehát a nemzetségnek valóban nem szakad magja.

Blázsik Zoltán, Szeged

Megjegyzés: A feladat tulajdonképpen nem szigorú matematikai nyelven történő megfogalmazása a végtelen gráfok elméletében nagy jelentőséggel bíró **Kőnig-lemmának** (Kőnig Dénes, 1884-1944.), pontosabban e „lemma" végtelen bináris fákra vonatkozó megszorításának. A Kőnig-lemma azt mondja ki, hogy ha a P_i halmazok ($i = 1, 2, \ldots$) végesek, nem üresek, páronként diszjunktak és a G gráf pontjainak halmaza éppen $\bigcup_1^\infty P_i$, továbbá G-ben P_i ($i \geq 2$) bármely pontjából vezet legalább egy él P_{i-1} valamely pontjába, akkor van olyan $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ végtelen hosszú út G-ben, amelyre $p_i \in P_i$. (lásd pl. Andrásfai Béla: Gráfelmélet, POLYGON Könyvtár, Szeged, 1994. 124-126. oldal).

A megoldók száma: 4.

36. Határozza meg azt az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt, amelyre

$$f(x + y + z) = \max(f(x + y), z) + \min(x, f(y + z)),$$

minden $x, y, z \in \mathbb{R}$ esetén !

Bencze Mihály, Brassó

Megoldás: Tegyük fel, hogy létezik a feltételeknek megfelelő függvény! Ekkor

$$f(x) = f(x - x + x) = \max(f(0), x) + \min(x, f(0)),$$

azaz $f(x) = x + f(0)$. Legyen $f(0) = a$ ($a \in \mathbb{R}$)! A következőkben megvizsgáljuk, hogy a milyen értékeket vehet fel.

$a = 0$ esetén $f(x) = x$, de ekkor például

$$f(6) = f(1 + 2 + 3) =$$
$$= \max(f(1 + 2), 3) + \min(1, f(2 + 3),$$

amiből nyilvánvaló ellentmondást kapunk. Tehát $a \neq 0$.

Ha $a > 0$, akkor $f(6) = 6 + a > 3 + a + 1$, amiből látszik, hogy a nem lehet pozitív.

Ha $a < 0$, akkor $f(6) = 6 + a = 3 + 1$, vagy $f(6) = 6 + a = 3 + 5 + a$. Az utóbbi nyilván nem

teljesülhet, az első pedig akkor teljesül, ha $a = -2$. Ekkor viszont

$$-1 = f(1) = f(0 + 0 + 1) =$$
$$= \max(f(0), 1) + \min(0, f(1)) = 0,$$

ami szintén ellentmondás.

Azt kaptuk tehát, hogy nem létezik a kívánt tulajdonságú f függvény.

Csorba Ferenc, Győr

Megjegyzés: A feladat „ravasz" abban az értelemben, hogy abból a feltételezésből, miszerint létezik az előírt tulajdonságú függvény egy szép ötlet alkalmazásával igen egyszerű képletet kapunk. Ez pedig nagy csábítás arra, hogy elmulasszuk ellenőrizni, vajon a kapott szükséges feltétel elegendő-e a függvény létezéséhez. A fenti megoldás ezért nagyon tanulságos.

A megoldók száma: 6.

A megoldók névsora: Ambrus Gabriella, Budapest (32., 33.); András Szilárd, Csíkszereda (31-34., 36.); Barta László, Benczúrfalva (31-36.); Bíró Bálint, Eger (32., 33.); Blázsik Zoltán, Szeged (32-36.); Boda Miklós, Pécs (32.); Csorba Ferenc, Győr (32., 34., 36.); Horváth Géza, Zselíz (32., 33.); László Sándor, Szombathely (32-34.); Mészáros József, Galánta (33.); Schutzbach Mártonné, Siófok (31., 33-35.); Simon József, Csíkszereda (31-34.); Tóth Sándor, Sárospatak (31-36.); Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely (32., 34., 36.); Zakar Bálint, Pécs (33.).

Pályázati felhívás

Kedves Kollégák! Kedves Diákok!

A Mozaik Oktatási Stúdió és A matematika tanítása Szerkesztősége pályázatot hirdet az 1996-os évszámmal kapcsolatban.

A pályamunkák az alábbi témákban készíthetők:

1. Feladatok, melyek 1996-hoz köthetők (a feladatok eredménye 1996; a feladatban felhasznált számjegyek az 1, 9, 9, 6; oszthatóság 1996-tal kapcsolatban stb.)

2. Gondolatok, okfejtések, érdekességek, egyedi tulajdonságok keresése 1996-tal kapcsolatban.

A legötletesebb pályamunkákat a lap hasábjain megjelentetjük, szerzőinek tiszteletdíjat fizetünk.

Beküldési határidő: **1995. október 15.**

Az írásokat a kiadó címére küldjék és a borítékra írják rá 1996.!

FELADATMEGOLDÓ VERSENY
nevezési lap

TANULÓ

Név: .....

Osztály: ..... Iskolatípus: .....

Születési idő: .....

Lakcím: .....

ISKOLA

Név: .....

Cím (Székhely): ..... Megye: .....

Utca / Szám: .....

Irányítószám: ..... Telefonszám: .....

Tanár (Név): .....

.....	.....	.....
tanár	igazgató ph.	tanuló

Könyvajánlat

Palánkainé Jakab Ágnes - Dr. Szederkényi Antalné

Jól felkészültem-e? Matematikai feladatsorok 5. és 6. osztályosoknak

Ezen füzetek tartalmilag és szerkezetileg illeszkednek a MOZAIK Oktatási Stúdió már eddig megjelent hasonló című kiadványaihoz. Felépítésében igazodik a jelenleg használatos tankönyvek témaköreihez:

5. osztály:
- A természetes számok
- Geometriai alakzatok
- Az egész számok
- Adott tulajdonságú ponthalmazok
- A törtek
- A szögek és mérésük
- A tizedes törtek

6. osztály:
- Számok, műveletek
- Geometriai alakzatok vizsgálata
- Racionális számok szorzása, osztása
- Egyenes és fordított arányosság
- Tengelyes tükrözés
- A természetes számok világa
- Egyenletek, egyenlőtlenségek

Megjelenik 1995. szeptember

Rójáné Oláh Erika - Gera Tibor

Matek tesztkönyv középiskolásoknak 1., 2., 3., 4.

4 kötetesre tervezett tesztkönyvsorozatunk első két kötete jelent meg. A könyvben közölt tesztek felhasználását egy-egy téma összefoglalása, év végi ismétlés, a IV. osztályos rendszerező összefoglalás és az érettségire illetve a felvételire való felkészülés részeként ajánljuk. A könyv úgy épül fel, hogy használhassák diákok az önálló tanuláshoz, tanárok a hagyományostól eltérő számonkéréshez és a differenciált tanórai foglalkoztatáshoz. Tartalmazza a feladatok megoldását, a feladatsorok megoldókulcsát, és a feladatok megoldásához szükséges legfontosabb ismereteket.

A feladatokat úgy állítottuk össze, hogy megoldásukhoz ne kelljen bonyolult és hosszadalmas számításokat végezni. A szükséges mellékszámításokat a diákok külön papíron végezhetik (ezt az értékelésnél nem kell figyelembe venni), a megoldásokat pedig megoldólapra írják, így a javítás gyors és egyszerű. A tesztekhez javasolt megoldólapot mellékeljük.

Megjelent 1., 2. ára: 498,- Ft

MATEMATIKA MEGOLDÁSOK I., II. Összefoglaló feladatgyűjtemény 10-14 éveseknek c. könyvhöz

Két kötetben jelentetjük meg a Metematika összefoglaló feladatgyűjtemény 10-14 éveseknek c. könyv feladatainak megoldásait.

Megjelenik 1995. október

imosoft

MOZAIK

A matematika TANÍTÁSA

1995. NOVEMBER ára: 90,- Ft III. évf. 5. szám

TARTALOM

A NAT MATEMATIKA-KÖVETELMÉNYRENDSZERÉRŐL
Pálmay Lóránt, Budapest

ÖTLETEK KÉT FELADATHOZ KAPCSOLÓDVA
Dr. Török Tamás, Esztergom

EGY KONFERENCIA MARGÓJÁRA
Elek Ernő, Ungvár
Kindrusz Pál, Nyíregyháza

GEOMETRIÁRÓL – JÁTÉKOSAN
Tóth Sándor, Sárospatak

MATEMATIKA HATÁROK NÉLKÜL
Somogyi László, Budapest

A MATEMATIKA FELADATMEGOLDÓ PONT-VERSENY II. FORDULÓJÁNAK FELADATAI

FELADATROVAT TANÁROKNAK

A ZRÍNYI ILONA ORSZÁGOS MATEMATIKA-VERSENY KIÍRÁSA

VERSENYNAPTÁR

1989 őszén indult el a Nemzeti Alaptanterv kidolgozása. Azóta több változatát ismerhették meg a kartársak. A változtatások részben az irányítás módosított koncepciója miatt történtek (például az első változat még 12 évfolyamra készült), másrészt a gyakorló pedagógusok, ... *(3. oldal)*

A világ számos országában jól működő vizsgarendszerrel mérik a tanulók tudásszintjét. Nem mindegy, hogy milyen felkészültségű szakemberek, milyen célból és milyen szempontok szerint állítják össze a feladatsorokat. A vizsgarendszer természetes működéséhez többek között... *(10. oldal)*

Mit tehet manapság az a matematikát oktató pedagógus, aki egy geometriai anyagrész tárgyalása során, avagy egyik-másik feladatmegoldás alkalmával azt veszi észre, hogy diákjainak egy része láthatólag nem érti azt, amiről előbb volt szó? Nyilvánvalóan megpróbálja... *(17. oldal)*

MÓDSZERTANI FOLYÓIRAT

A MATEMATIKA TANÍTÁSA
módszertani folyóirat

Szerkesztőség:
Főszerkesztő: Dr. Urbán János
Szerkesztőség címe:
6723 Szeged, Debreceni u. 3.
Tel.: (62) 312-988,
FAX: (62) 328-247

Kiadó:
MOZAIK Oktatási Stúdió Kft.
Felelős kiadó: Török Zoltánné
Műszaki szerkesztő:
Vassné Németh Katalin
Tördelő szerk.: Kovács Attila
Borítóterv: Magyar Csaba

Megrendelhető:
MOZAIK Oktatási Stúdió
6701 Szeged, Pf. 301.
Éves előfizetési díj: 450 Ft

A lap megvásárolható a MOZAIK Könyvesboltokban: Szeged, Csongrádi sgt. 73. Budapest VIII., Üllői út 70.

Megjelent a Művelődési és Közoktatási Minisztérium támogatásával.

A matematika tanításában megjelenő valamennyi cikket szerzői jog védi. Másolásuk bármilyen formában kizárólag a kiadó előzetes írásbeli engedélyével történhet.

ISSN 1216-6650

Készült a Dürer Nyomda Kft-ben
Felelős vezető: Székely András

TARTALOM

A NAT MATEMATIKA-KÖVETELMÉNYRENDSZERÉRŐL
Pálmay Lóránt, Budapest

ÖTLETEK KÉT FELADATHOZ KAPCSOLÓDVA
Dr. Török Tamás, Esztergom

EGY KONFERENCIA MARGÓJÁRA
Elek Ernő, Ungvár
Kindrusz Pál, Nyíregyháza

GEOMETRIÁRÓL – JÁTÉKOSAN
Tóth Sándor, Sárospatak

MATEMATIKA HATÁROK NÉLKÜL
Somogyi László, Budapest

A MATEMATIKA FELADATMEGOLDÓ PONTVERSENY II. FORDULÓJÁNAK FELADATAI

FELADATROVAT TANÁROKNAK

A ZRÍNYI ILONA ORSZÁGOS MATEMATIKAVERSENY KIÍRÁSA

VERSENYNAPTÁR

Közlési feltételek:

A közlésre szánt kéziratokat gépelve két példányban vagy floppy lemezen küldjék meg a szerkesztőség címére. A kéziratok lehetőleg ne haladják meg a 6-8 gépelt oldalt (oldalanként 30 sorban 66 leütés).

A rajzokat, ábrákat, táblázatokat és fényképeket külön lapon megfelelő szövegezéssel kérjük ellátni. (A szövegrészben pedig zárójelben utaljunk rá.)

Kérjük, hogy a szövegbeli idézések név és évszám jelöléssel történjenek, míg a tanulmányok végén a felsorolt irodalmak alfabetikus sorrendben készüljenek.

Kérjük szerzőtársainkat, hogy a kéziratok beküldésével egyidejűleg szíveskedjenek közölni pontos címüket, munkahelyüket és beosztásukat, a megjelent cikkek utáni honorárium kifizetése érdekében személyi számukat. A cikk megjelenése után a lemezeket visszaküldjük.

Pálmay Lóránt

A NAT matematika követelményrendszeréről

1989 őszén indult el a Nemzeti Alaptanterv kidolgozása. Azóta több változatát ismerhették meg a kartársak. A változtatások részben az irányítás módosított koncepciója miatt történtek (például az első változat még 12 évfolyamra készült), másrészt a gyakorló pedagógusok, a pedagógus szervezetek, egyesületek véleményét is igyekeztek figyelembe venni a tanterv készítői. A második és az ötödik változat elkészülte után több ezren írták le javító szándékú javaslataikat. Magam is igen sok kerületi és megyei összejövetelen , „NAT vitán" vettem részt, s bár különböző helyzetükből adódóan természetes, hogy a felszólalók sok esetben eltérő véleményeket hangoztattak, mindenütt éreztem a tanulóifjúságért való aggodalmukat, az oktatás ügyéért érzett felelősségüket, tantárgyuk féltését.

Nyilvánvaló, hogy a sokszor ellentétes véleménynek mindegyikét nem lehetett az alaptanterv készítésekor figyelembe venni. Mégis nagyon sokat köszönhetünk ezen észrevételeknek, hogy végül is olyan alaptanterv készült matematikából, amely olyan alapvető tananyagot tartalmaz, amivel a pedagógusok zöme egyetért, amely biztosít majd a kialakult sokféleségben bizonyos egységet.

Olyan alaptantervet kellett készítenünk, amely lehetőséget biztosított arra is, hogy a pedagógusok a helyi tantárgyi programjaikban megvalósíthassák különböző elképzeléseiket, iskolájuk vállalt profiljának megfelelő helyi tantervet alakíthassanak ki.

A NAT matematikakövetelményeinek 1995. évi szeptemberi változatáról

Az 1994. évi decemberi változat minden iskolába eljutott, így ezt ismertnek tételezem fel. Ehhez képest a következő lényeges eltérések találhatók az új tervezetben:

A rövid bevezetést követő általános fejlesztési követelmények két oszlopban szerepelnek, az első oszlopban az 1-6. évfolyamra ezek a követelmények az életkornak megfelelően konkrétabbak, míg a másodikban a 7-10. évfolyamon ugyanezek a követelmények már elvontabbak. Például „Az elsajátított matematikai fogalmak alkalmazásában" az egyik pont (1. d) az első oszlopban: „Tevékenységre épülő, egyszerű geometriai transzformációk használata", a másodikban (1. D): „Geometriai transzformációk segítségével dinamikus geometriai szemlélet".

Más jellegű általános fejlesztési követelmény „Gyakorlottság a matematikai problémák megoldásában" egyik pont az első oszlopban: „Szövegek alapján nyitott mondatok felírása. Ezeknek (módszeres) próbálkozással, majd algebrai úton történő megoldása", a másodikban: „Többféle megoldás lehetősége. Fejlődő diszkussziós képesség."

Ezeknek a pontoknak a jelzései a háromoszlopos részletes követelmények középső oszlopában (a „Fejlesztési követelményekben") az egyes témaköröknél konkretizálva jelennek meg. Például a geometria témakörben a transzformációval kapcsolatban a következő található a 6. évfolyamnál: „Szimmetriák megfigyelése környezetünkben. Transzformációk, parkettázás, modellezés 1. d". A 8. évfolyamnál többek között ez szerepel: „A szimmetriák felismerése és tulajdonságainak alkalmazása háromszögek és négyszögek vizsgálatában. Középpontosan hasonló sokszögek szerkesztése 1. D".

Megjegyzem, hogy e téma a 4. és a 10. évfolyam követelményeiben is megjelenik. Többek között ez is mutatja, amiről a bevezetésben is szó van, a spirális felépítést.

A jelenlegi NAT-változatban az egyes műveltségi területek 4., 6., 8. és 10. évfolyamra vonatkozó követelményrendszere együtt talál-

ható meg szemben az 1994. decemberi tarvezettel. Ez is azt jelzi, hogy a mai hazai különböző iskolastruktúrákban (a 8 + 4-es, a 6 + 6-os, a 4 + 8-as rendszerben) egyaránt használható a tanítás első tíz évében a NAT, nem tünteti ki tehát egyiket sem.

A matematika részletes követelményei a legújabb változatban is háromoszlopos formában találhatók. Az első oszlopban a tanítandó tananyag van felsorolva, tehát az, amivel a pedagógusoknak a 4., a 6., a 8. illetve a 10. évfolyam végéig minden iskolában foglalkozni kell. A már korábban is ismertetett második oszlopban szerepelnek azok a konkrét képességek, amelyeket az egyes tananyagrészek segítségével a pedagógus a tanulóban kifejleszt. Az első és a második oszlop tehát a tanítóra, a tanárra vonatkozik. A harmadik oszlopban találhatók a minimális teljesítmények. Ezek a tanulókra vonatkoznak, s azok az ismeretek, készségek szerepelnek benne, melyeket nélkülözhetetlennek tartunk a magasabb évfolyamba lépéshez. Persze közvetve a harmadik oszlopban felsoroltak is a pedagógusnak szólnak. Ui. azt a tanulót tanító tanár tudja eldönteni, hogy a tanuló birtokában van-e annak a minimális tudnivalónak, ami a továbbtanuláshoz szükséges. Azt általában nem lehet egyetlen külső felméréssel eldönteni, hogy a tanuló egy-egy hibát figyelmetlenségből követett el (mindenki tévedhet), vagy pedig még a szükséges minimális anyagot sem tudja. Ezt a tanulót tanító pedagógus tudja megállapítani. A külső felmérésnek persze lehet olyan szerepe, hogy kimutassa a tanuló teljes tudatlanságát, vagy fordítva: éppen azt mutathatja meg a diák, hogy pl. a 8. évfolyam végére az akkorra előírt minimális teljesítmény birtokába jutott.

Természetesen a mindenki számára kötelező minimumnak olyannak kell lennie, melyet egy szellemileg ép, s megfelelő szorgalmú tanuló mindemképpen teljesíteni tud. Ha a minimumba a szorgalmas, de matematikából gyengébb képességű vagy más érdeklődésű tanulók számára teljesíthetetlen mennyiségű (vagy nehézségű) anyag kerülne, akkor vagy megnövekedne a bukások száma, vagy pedig egyes tanárok nem vennék figyelembe, hogy a kijelölt minimumot mindenkinek teljesítenie kell. S ezt komoly problémának tekintjük. Azt viszont nyilvánvalónak tartjuk, hogy az ismeretek, a tudás megszerzéséhez tanulásra, erőfeszítésre van szükség.

Többször hallani, hogy a NAT-nak csak a minimumot kellene meghatároznia, minden mást a pedagógusra kellene bízni. Az elmúlt időszak tantervei valóban túl sok anyagot tartalmaztak, így kevés lehetőségük volt a pedagógusoknak az általuk fontosnak tartott anyagrészek tanítására. Ugyanakkor az előbb leírtak szerint a minimumba igen kevés anyag került, többségében csak olyanok, amelyek a gyakorlati élet illetve más tantárgyak tanításánál is nélkülözhetetlenek. Az itthon sokat szidott matematikatanításunk eredményeit a nemzetközi felmérések pozitívan ítélik meg. Ebben feltétlenül szerepet játszik, hogy tanításunkban a gondolkodásra nevelésre nagy gondot fordítunk. Vigyáznunk kell eddigi eredményeinkre. Ehhez semmiképpen sem elég a minimumban felsorolt tananyag. A túlzsúfolt ismeretanyag és a mindenki számára kötelező minimum között meg kell találni egy józan középutat. A túl sok anyag miatt a gondolkodás fejlesztésére nem marad elegendő idő, viszont ha alig van ismeretanyag, akkor min fognak gondolkodni. Így az első oszlopban felsorolt anyagrészek, tevékenykedtetések (amelyek a jelenlegi tanítottaknál lényegesen kevesebbek) tanórán való szerepeltetését szükségesnek tartjuk. Különösen fontos, hogy a „Gondolkodási módszerek" témakörében felsoroltak: a halmazszemlélet, a matematikai logika és a kombinatorika elemei, melyekből a minimális teljesítményben csak a 10. évfolyam végén van egy kevés felsorolva, ne maradjon ki a tanításból. Ezek ui. a gondolkodás fejlesztésében, a megismerési folyamatban nagyon lényegesek.

Az 1994. decemberi NAT matematika témaköre viszonylag kedvező fogadtatásra talált. Így bizottságunknak, minden változtatási (kihagyási, pótlási, részletezési) javaslatot alaposan végig kellett gondolnia. A javaslatok ui. sokszor egymásnak ellentmondtak. Például egyesek a jelenleg a szakmunkásképzők I. osztályában is tanított derékszögű háromszögek trigonometriáját is ki akarták hagyni a 10. évfolyam követelményeiből, míg mások a trigonometria egészét a követelmények közé akarták betetetni.

Így minden csökkentés vagy bővítés lehet, hogy nem javítaná, hanem rontaná a mate-

matikatanárok körében az alaptanterv elfogadottságát. A részletezési igényt olyan konkrét esetekben elégítettük ki, ahol a szűkszavúan megfogalmazott követelmény félreérthető volt. Például a 8. évfolyam tananyagában szerplő „Statisztikai vizsgálatok, adatsokaság szemléltetése" helyett „Adatok gyűjtése, rendszerezése, adatsokaság szemléltetése" került. Ugyan voltak olyan kollégák, akik a statisztika teljes kihagyását javasolták, de ez így nem teljesíthető, hiszen az itt felsoroltakra, továbbá grafionok készítésére, olvasására, az átlag kiszámítására igen sok tantárgyban szükség van. Bizonyos esetekben kis részletezéssel, egy-egy jellemző példa beírásával lehetett segíteni azon, hogy a kartársak érzékeljék a követelmény egyszerűségét vagy mélységét.

Bízunk benne, hogy az alaptantervbe került egy-két illusztráló példát a kartársak annak tekintik, aminek szántuk. Nem arról van szó, hogy ezt a példát kell megtanítani, hanem ez csupán a szintre utal. Valójában ezen a problémán egy tanári útmutatóval lehet majd segíteni.

A NAT 1994. decemberi változatának megírásában Lajos Józsefnéval (OKSZI) és dr. Urbán Jánossal (Berzsenyi D. Gimnázium, Bp.) dolgoztam együtt. Természetesen a NAT korábbi változatai készítőinek, sőt igen sok, a különböző NAT-vitákon felszólaló tanítónak, tanárnak számos ötlete, megjegyzése is beépült az anyagba. Dr. Szilágyi Imrénével, a kisiskolás kor (1-4. évfolyam) követelményeinek kidolgozójával, s a megfelelő matematikai fejezettel foglalkozókkal is állandó kapcsolatban álltam.

Így biztosítottuk a követelmények egymásra épülését. Hasonlóan, a matematikát alkalmazó műveltségi területek követelményeinek összeállítóival is többször tartottunk megbeszélést.

Az 1994. decemberi változatra beérkezett nagyszámú vélemény megvitatásában részt vett még Ács Katalin általános iskolai tanár a Bolyai J. Matematikai társulat részéről és dr. Vancsó Ödön adjunktus (ELTE).

A következő évek feladatai

A NAT közeljövőben történő elfogadása esetén az iskoláknak előre láthatólag három tanév áll majd rendelkezésükre, hogy felkészüljenek arra, hogy a központi tanterv helyett **helyi tanterv** szerint tanítsanak. A tanítás tehát nem a NAT alapján fog történni, hiszen az csak 10 évre írja elő a követelményeket, s csak – mint tudjuk – a 4., 6., 8. és 10. évfolyam végére. A NAT tehát nem a régi értelemben vett tanterv, ami szerint minden iskola taníthat. A NAT azt tartalmazza a különböző műveltségi területekből, amelynek minden iskolában a 10. évfolyam végéig szerepelnie kell. De nem írja elő az egyes évfolyamokon sem a tantárgyakat, sem az óraszámokat. (A jelenlegi tervezet bevezetőjében ugyan az egyes műveltségi területek témaköreire a rendelkezésre álló idő felosztására egy %-os tól-ig arányra van javaslat.)

Az egyes iskoláknak a helyi tanterv készítésekor a helyi lehetőségek és szükségletek figyelembevételével ki kell alakítaniuk a profiljukat (profiljaikat). Ezután állapíthatják meg, hogy milyen tantárgyakat melyik évfolyamokon és milyen óraszámban fognak tanítani. Nyilván a matematikát mindenütt fogják tanítani, de az már az iskola lehetőségeitől függhet, hogy pl. a természetismeretet istegráltan fogják-e tanítani, vagy tantárgyakra bontva.

Miután az iskolában a helyi tantervi háló elkészült, s azt a fenntartó jóváhagyta, választhat a tanár a már eddig is kész, illetve az elkövetkezőkben készülő tantárgyi programokból, tankönyvekből, taneszközökből. Természetesen készíthet sajátmaga számára tantárgyi programot. (Ezeket korábban tantárgyi tanterveknek nevezték.)

Az iskolák különböző lehetőségei, feladatvállalásai miatt matematikából is különböző tanítási programoknak kell készülnie. Nyilvánvaló, hogy más programot fog használni a tanár, ha tanítványainak zöme olyan egyetemre készül, ahol a matematikát jól kell tudniuk, vagy ha a 10. év után a szakoktatásban fognak tovább tanulni, vagy nem is tanulnak tovább.

A NAT-ban szerplő anyagot tanítani kell, de lesz, ahol a hangsúly a minimumra kerül, másutt az első oszlopban szereplő tananyagra, ismét másutt pedig bővíteni lehet (kell) az anyagot.

A tantárgyi programok kiválasztása után a részletes tanmenetek kidolgozásakor szükséges

összehangolni az egyes tantárgyak tanmeneteit. Itt lehet például biztosítani azt, hogy a vektorokból vagy a trigonometriából a kellő ismeretek rendelkezésre álljanak már akkor, amikor azt a fizika alkalmazni akarja. (Persze az is elképzelhető ezután is, hogy egy-egy egyszerű fogalmat, ismeretet a fizika előbb használ, s a matematikában történő bevezetésekor éppen a fizikára hivatkozhatunk.)

Az elkövetkező éveknek ezek a várható feladatai. A részletes tervezéskor persze az is kiderülhet, hogy a NAT-ban előírt követelményeket itt-ott meg kell változtatni. Remélhetőleg erre nem lesz sok esetben szükség, de a jó megvalósítás érdekében ettől sem szabad elzárkózni.

A NAT jóváhagyása után rövidesen (egy-két hónapon belül) kiküldik az iskolákba, s elkezdődhet az itt vázolt munka. Ehhez szaktanácsadóink, szakértőink segítséget fognak nyújtani.

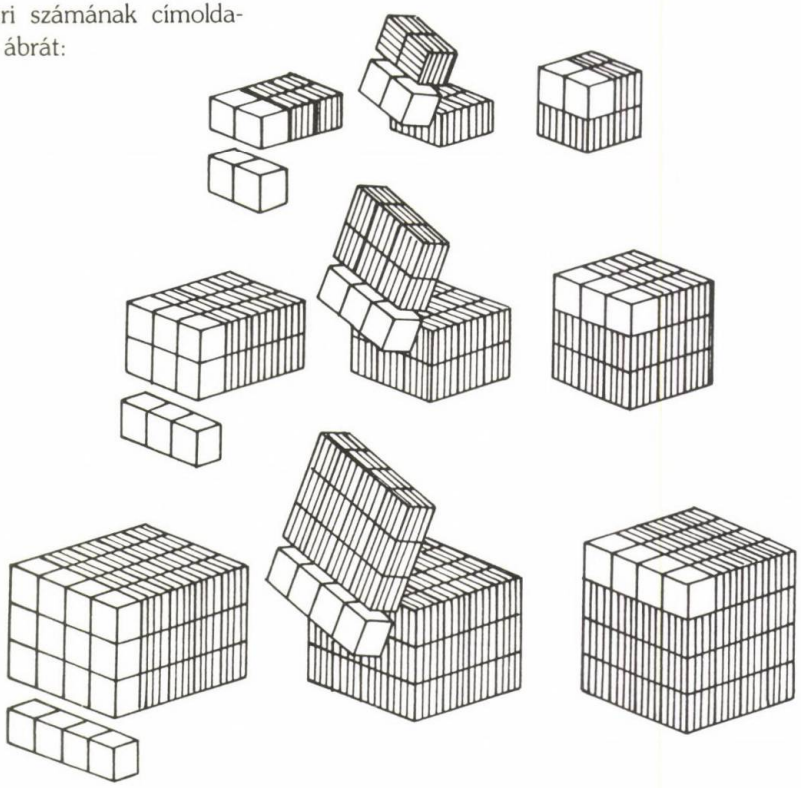
Az iskolákban dolgozó tanítóknak, tanároknak a feladatok elvégzéséhez kellő erőt és sok sikert kívánok, s továbbra is várjuk értékes észrevételeiket.

Dr. Török Tamás

Ötletek két feladathoz kapcsolódva

Feladatok egy kockaépítéssel kapcsolatban

A Mathematics Teacher című folyóirat 1992. novemberi számának címoldalán láttam ezt az ábrát:



A hozzá tartozó cikk csak egy pár soros, formális bizonyítást tartalmaz, miszerint általában is igaz, hogy:

$$n(n+1)(n+2)+n+1=(n+1)^3 \quad (n\in\mathbb{N}).$$

Arra gondoltam, hogy a természetes számoknak ez a tulajdonsága nem csak azoknak a tanulóknak lehet érdekes, okozhat sikerélményt, akik ezt a tényt matematikai egzaktsággal bizonyítani is tudják. Néhány ezzel kapcsolatos feladatot állítottam össze (az ábrától indíttatva) különböző korosztályú diákok számára.

Alsó tagozat

1. Rakjuk a gyerekek elé (három, jól elkülönített csoportban) a színes rúdkészlet fehér kockáiból összeállított, az ábra bal oldali oszlopának megfelelő alakzatokat!

a) Nézd meg, hogy milyen magasak, szélesek és hosszúak a téglatestek! Jegyezd is le számhármasok formájában:

$(1, 2, 3) + (1, 2, 1)$
$(2, 3, 4) + (1, 3, 1)$
$(3, 4, 5) + (1, 4, 1)$

Mit veszel észre? Hogyan jegyeznéd le a következőt? Építsd is meg az ennek megfelelő formációt!

b) Számold meg – minél egyszerűbben –, hogy hány kiskockából állnak! Próbáld meg ugyanezt számítással is meghatározni, az a)-ban lejegyzett számok segítségével kifejezni!

c) Építs belőlük (minden elem felhasználásával) kockát! Építés közben helyettesítsd a kiskockákat a Dienes-készlet megfelelő elemeivel!

d) Hogyan tudnád kettes-, hármas- ill. négyesországban lejegyezni a fehér kiskockák darabszámát?

Felső tagozat

2. Milyen szabály alapján működik a gép?

bemenet	2	3	4	5	?
kimenet	8	27	64	?	216

3. Folytasd az alábbi sorozatot!

1, 8, 27, 64, ...

Középiskola

4. Hozzuk egyszerűbb alakra az

$$n(n+1)(n+2)+n+1$$

kifejezést

a) kiemeléssel,
b) zárójel felbontásával!
c) Milyen n-re igaz a kapott azonosság?
d) Mondjuk el szóban is (legyen most $n\in\mathbb{N}$) a természetes számoknak ezt a tulajdonságát!
(Bármely három, egymást követő természetes szám szorzatához a középső elemet hozzáadva ez utóbbi szám köbét kapjuk.)
e) Milyen hasonló, tanult tulajdonságokra emlékszel?

Tanító- és tanárképző főiskola

5. Bizonyítsuk be az

$$n(n+1)(n+2)+n+1=(n+1)^3 \quad (n\in\mathbb{N})$$

azonosságot

a) kiemeléssel,
b) zárójel felbontásával,
c) egyszerűsítéssel,
d) teljes indukcióval!

6. 4/d

7. Igaz-e az állítás tetszőleges valós ill. komplex számokra?

8. Hogyan lehet a színes rúdkészlet ill. a Dienes-készlet elemeivel demonstrálni a természetes számoknak ezt a tulajdonságát? Tervezzünk ezen alapuló számrendszeres és szabályjátékos feladatokat (1. a-d)!

9. Hogyan szemléltethetnénk alsó és felső tagozaton a természetes számokkal kapcsolatos hasonló tulajdonságokat, azonosságokat? Tervezzünk is meg egy ilyet! Készítsünk róla óravázlatot!

Következtetés vizsgálata tapasztalással és gondolati úton (Egy KÖMAL-feladat kisiskolásítása)

Az 1994. évi Rátz László Vándorgyűlésen hallottam Surányi János: Matematika a KÖMAL-ban c. előadásában a következő feladatot:

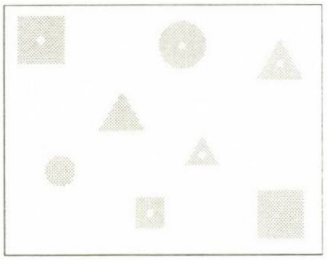
„Egy halmazról tudjuk, hogy nem minden eleme azonos színű. Tudjuk továbbá, hogy nem minden eleme azonos alakú. Bizonyítsuk be, hogy akkor van legalább két olyan eleme, amelyek színben és alakban is eltérnek!"

Arra gondoltam, hogy a következtetés bizonyítása megfelelő előkészítéssel és feldolgozásmóddal már elemi szinten (4-6. osztályban) is tárgyalható, és ezt az alábbiak szerint képzelem. Ebben tárgyi és gondolati tevékenység egyaránt helyet kap.

a) Döntsd el, hogy igazak-e az alábbi állítások a képen látható logikai lapokra!

1. állítás: Nem mind azonos méretű.

2. állítás: Nem mind azonos simaságú.



- Fogalmazd át a mondatokat! (Van közöttük kicsi is és nagy is. Van köztük sima is és lyukas is.)
- Tudnál-e további igaz és hamis állításokat mondani a képről?

3. állítás: Vannak közöttük olyanok, amelyek méretben és simaságban is eltérnek.

- Ezt az állítást is vizsgáld meg! Igaz vagy hamis? Indokold is válaszodat! (Az állítás igaz, mert például a kicsi lyukas háromszög és a nagy sima négyzet, vagy a kicsi sima kör és a nagy lyukas négyzet méretben és simaságban is eltér.)
- Fogalmazd meg az állítást másképpen! (Van közöttük kicsi lyukas és nagy sima, vagy nagy lyukas és kicsi sima.)

b) Hozz létre hasonló ábrát! Saját logikai készletedből válassz ki 5-10 darab lapot úgy, hogy az 1. és a 2. állítás is teljesüljön!

- Most a 3. állítást is ellenőrizd! Ugye, igaznak találtad!

c) A logikai készletből kiválasztottunk néhány elemet. Ezek két szempontú rendezése történhet a táblázat alapján úgy, hogy minden elemet a megfelelő helyre teszünk.

	kicsi	nagy
sima		
lyukas		

Hányféle táblázat jöhet létre, ha üresen hagyjuk azokat a négyzeteket, ahová nem került elem, a többit pedig beszínezzük?

A táblázatok lehetséges színezése:

	kicsi	nagy
sima		
lyukas		

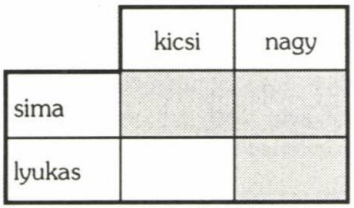
1.

	kicsi	nagy
sima		
lyukas		

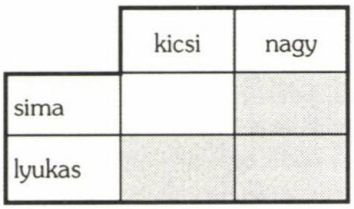
2.

	kicsi	nagy
sima		
lyukas		

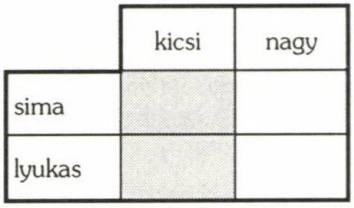
3.



4.

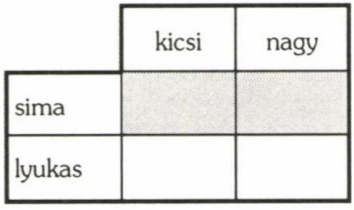


5.

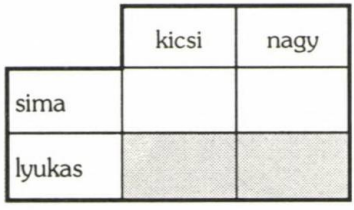


6.

7.

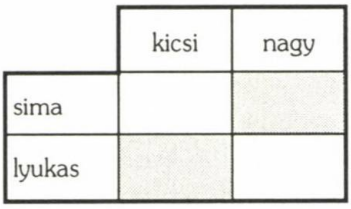


8.

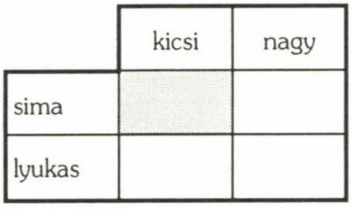


9.

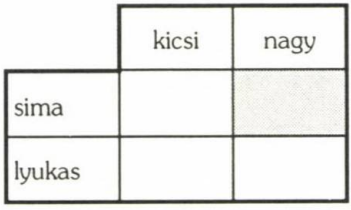
10.



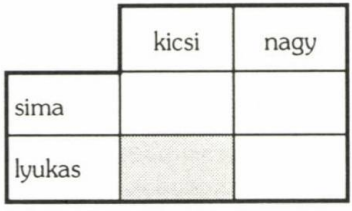
11.



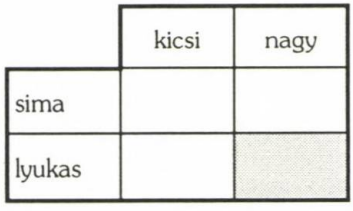
12.



13.



14.



15.

- Válaszd ki azokat a táblázatokat, amelyekre az 1. és a 2. állítás is igaz! (1-5., 10-11.)
- Csak ezekre a táblázatokra vizsgáld meg a 3. állítást! Mit veszel észre? Mi a közös bennük a színezésüket tekintve? (Valamelyik átló két négyzete színezve van a táblázatban.)
- Mit mondhatsz akkor a három állítás viszonyáról? (Az első kettőből mindig következik a harmadik.)

d) Fogalmazz meg hasonló állításokat és következtetéseket, amelyek az osztály tanulóival kapcsolatosak! Ellenőrizd is a három állítás igazságát!

Egy példa:

1. Az osztályba fiúk és lányok is járnak.
2. Az osztályban vannak barna és szőke hajúak is.
3. Az osztálynak biztos van barna lány és szőke fiú, vagy szőke lány és barna fiú tanulója. (Van legalább két olyan tanuló az osztályban, akik nemükben és hajszínükben is eltérnek.)

Módszertani megjegyzések:

Az *a)* és a *b)* feladatrészeknél a gyerekek előre megadott, illetve saját maguk által elkészített ábrák alapján tapasztalják, hogy az első két állítás igazságából következik a harmadiké is. Ezért a feladat *a)* és *b)* részének feldolgozása – azok konkrétsága miatt – már 4. osztályban is javasolható.

Más a helyzet a *c)* feladatrésznél. Ott a logikai készlet nem egy bizonyos olyan részhalmazáról van szó, amelyre az első két állítás igaz, hanem az összes olyanról. A feladat ezen része az elemi szintű feldolgozás ellenére, a következtetés általánossága miatt csak 5-6. osztályban javasolható.

Elek Ernő – Kindrusz Pál

Egy konferencia margójára

(Tapasztalatok az ukrán matematika érettségi vizsgáról)

A világ számos országában jól működő vizsgarendszerrel mérik a tanulók tudásszintjét. Nem mindegy, hogy milyen felkészültségű szakemberek, milyen célból és milyen szempontok szerint állítják össze a feladatsorokat.

A vizsgarendszer természetes működéséhez többek között olyan mérőeszközökre van szükség, amelyeknél egyidejűleg teljesülnek az objektivitás, a validitás (érvényesség) és a reliabilitás (megbízhatóság) feltételei.

A standard mérőeszközökön kívül a rendszer gördülékeny működéséhez szükséges a pedagógusok méréstechnikai, mérésmetodikai ismerete és egy „fogadóképes" civil társadalom.

Magyarországon már elkezdődött az a folyamat, amelyben egy vizsgarendszer infrastruktúráját, intézményrendszerét létrehozhatják. (Oktatási Törvény, Alapműveltségi Vizsgaközpont – JATE, holland-magyar közös érettségi kísérlet – CITO – OKI Értékelési Központ, hároméves posztgraduális képzésben mérési szakértői szak – JATE, mérési szakértői és vizsgabiztosi tréningek – PSZM, az iskolák műhelymunkában csinálják az év végi belső vizsgákat stb.)

Ehhez azonban a meglévő szakembereken kívül pénzre és időre van szükség. A működő nemzetközi vizsgarendszerek között találunk látszólag stabilnak tűnő szerkezeteket és néhány, önmaga megújítására törekvő struktúrát is. Az utóbbira lehet példa az ukrán vizsgarendszer. Az Ukrán Felsőoktatási és Középoktatási Minisztérium és a Kárpátaljai Pedagógiai

Továbbképző Intézet közösen rendeze meg azt az 1994. szeptember 5-9-ig tartó konferenciát, amely az ukrán érettségi vizsga tapasztalataival és a pedagógiai mérés és értékelés problémáival foglalkozott. A többnapos értekezleten részt vettek az Ukrán Köztársaság mind a 27 Területi Pedagógiai Intézetének matematikai kabinetvezetői, az egyetemek matematikai tanszékének képviselői – köztük az érettségi feladatsorok összeállítói – és kárpátaljai magyar pedagógusok.

Ukrajnában évente kb. 310 ezer diák érettségizik. Második éve már tesztekkel vizsgáztatják a tanulókat. Az anyanyelv és a matematika kötelező, ezenkívül a gyerekek választhattak még egy-két tantárgyat.

Az 1994-es érettségi 43 milliárd Karbovanyecbe került, ami kb. 100 millió forintnak felel meg.

Vizsgáljuk meg részletesebben a matematikavizsgát! Egy – mindenki által ismert – feladatgyűjteményből kiválasztottak 30 feladatot, melyek sorszámát a vizsga napján reggel a rádió és a televízió közölte.

A feladatok három különböző csoportba tartoztak: az első 10 feladat a minimumkövetelményekből (1-1 pontot ért), a következő 10 feladat – 2 pontot ért minden hibátlan megoldás – még szintén a minimumkövetelményből, de többlépcsős megoldást igényelt, míg az utolsó 10 feladat az alkalmazás szinten magasabb matematikai tudást feltételezett és 3-3 pontot ért.

A pedagógusok a tanteremben elhelyezett táblákra felírták a 30 feladat szövegét, s ezután a diákok 5 órát kaptak a megoldásra.

A javításhoz minden matematika szakos tanárnak először készítenie kellett egy javítási útmutatót (a pontok adottak voltak). Az értékeléshez központilag közöltek egy skálát:

1-20 pontig kettest (ez megfelel a bukásnak)
21-35 pontig hármast
36-49 pontig négyest és
50-60 pontig ötöst kaptak a tanulók.

A tanulói teljesítmények százalékos megoszlása kárpátaljai viszonylatban a következőképpen alakult:

A tanulók kb.
5 %-a kettes
50 %-a hármas
40 %-a négyes
5 %-a ötös volt.

Ez megfelel az utóbbi két év ukrajnai átlagának. A vizsgateljesítmények eredményei messze meghaladták a tanulók évközi munkájára adott érdemjegyeket, emiatt a pedagógusok nagy része elégedetlen az érettségi feladatok nehézségi fokával. A tényleges tudás és a vizsgaprodukció – érzésük szerint – nincs összefüggésben egymással, (bár erről az értékelés folyamatának szubjektív komponensei miatt ők is tehetnek). A rendszer legfőbb gyenge pontja, hogy a feladatsorok összeállítását olyan gyakorló pedagógusokra (egyetemi tanárokra) bízták, akik a mérésmetodikában és a tesztelméletben nem rendelkeztek kellő jártassággal. A megfelelő méréselméleti ismeretek hiánya miatt előfordult, hogy a matematika szakra összeállított egyetemi felvételi feladatokat tették be – a tesztszerkesztő tudta nélkül – országos érettségire, még néhány nagyon könnyű feladattal kiegészítve, hogy a „gyengébb tanulóknak is legyen sikerélményük". A feladatok közötti nagy szintkülönbségeket az oktató tanárok némi segítség adásával és „szubjektív" értékeléssel igyekeztek kiegyenlíteni. Az ily módon nem kellően előkészített és szervezett érettségi vizsga:

- nem használható a tényleges tudásszint mérésére
- a tanulókat és a szülőket félreinformálja
- nem hat vissza az oktatási program szervezésére
- nem közöl használható információkat az oktatásirányítás számára, ezért a matematika tanításának módszertana kevés hiteles forrásra támaszkodhat
- a matematikaoktatásról alkotott kép hamis illúziókat kelt.

A tapasztalatokról

A jelenlegi vizsgarendszer miatt sok kritika érte a minisztériumot és az oktatást irányító szerveket, mert az, a mai formájában

nem tölti be funkcióját, költséges és sok időt, energiát emészt föl.

A változtatás igénye merült föl akkor, amikor az Ukrán Oktatási Minisztérium megbízta a Kárpátaljai Pedagógus Továbbképző Intézetet, hogy szervezzen meg egy konferenciát „A pedagógiai mérés és értékelés aktuális problémái" címmel. A tervezett előadássorozatra a Szabolcs-Szatmár-Bereg Megyei Pedagógiai Intézet mérésekkel foglalkozó munkatársát hívták meg. Az előadások ukrán nyelvű tolmácsolására Kicskó György matematika-informatika szakos munkácsi pedagógust kérték fel.

Feladat sorszáma	item-kritérium korreláció	megoldottság (%)	determinációs hatás(%)
1.*	0	100	0
2.*	0,1264	98	1,59
3.*	0,0526	99	0,27
4.	0,2896	95	8,38
5.	0,2574	94	6,62
6.*	0	100	0
7.*	0,1495	99	2,23
8.*	0,0284	99	0,08
9.	0,2290	81	5,24
10.	0,3790	87	14,36
11.	0,2809	95	7,89
12.	0,5560	91	30,91
13.	0,5174	90	26,77
14.	0,3571	94	12,75
15.	0,5590	86	31,24
16.	0,6970	89	48,58
17.	0,4044	92	16,35
18.	0,5630	81	31,70
19.	0,6838	82	46,76
20.	0,5463	82	29,84
21.	0,7108	82	50,52
22.	0,7641	74	58,38
23.	0,8190	79	67,07
24.	0,7856	74	61,7
25.	0,8119	71	65,92
26.	0,8306	72	68,98
27.	0,7561	73	57,16
28.	0,8172	59	66,78
29.	0,8522	65	72,62
30.	0,7899	58	62,38

1. táblázat

*A *-gal jelzett feladatok p=5%-os szignifikancia-szinten nem jól mérnek.*

A tanácskozás tematikája a következő volt:

1. nap: – A pedagógiai mérés (értékelés) célja, lényege, típusai. Vizsgaformák, vizsgaanyagok.

2. nap: – Egy lehetséges vizsgamodell felépítése, a modellezés lépései, tapasztalatok.

3. nap: – Feladattipológia, feladatbank, tesztbank.

4. nap: – Mérőeszközök szerkesztése, értékelési kritériumok és módszerek.

5. nap: – A mérési adatok feldolgozása, elemzése.

A konferencia témájában az elméleti előadásokat gyakorlati problémák megbeszélése követte: mint például az 1994-es matematika érettségi kárpátaljai eredményének számítógépes feldolgozása, a teszt paramétereinek kiszámítása és ellenőrzése. (1. táblázat)

A tesztelemzés eredményeként érdekes információkat tudhattak meg a résztvevők az 1994-es matematika feladatsorról.

Alapstatisztikák a feladatsorról

A reliabilitás vagy más néven a megbízhatóság azt fejezi ki, hogy mennyire pontosan méri a teszt azt, amit mérni szeretnénk. A nulla és egy közé eső értéket a tanulói teljesítményekből tudjuk kiszámítani. A szakirodalomban ismert konzisztenciamutatók közül (pl.* K-R 3, K-R 8, K-R 14, K-R 20, K-R 21, Guttman-állandó, Flanagan-állandó, Spearman–Brown-formula, Cronbach stb.) mi a Cronbach-α-át vettük alapul.

A feladatsor megbízhatósági együtthatója = 0,9613 (Cronbach-alfa), ami jónak mondható, különösen, ha a nemzetközileg is javasolt 0,8-es értéket tekintjük alsó határértéknek.

A csoport teljesítményének átlaga: $\overline{X} = 48{,}52$ pont (a maximális 60 pont volt).

Ez az adat önmagában a szakembereknek nem sokat mond, mert ez az érték sokféleképpen jöhet létre. Talán praktikusabb lenne a gyakorlati pedagógiában az eddig alkalmazott pontbecslés helyett intervallumbecslést alkalmazni.

A konfidencia-intervallum $\Delta = 46{,}4 - 50{,}6$ pont ($p = 5$ % szignifikancia-szinten), ami azt jelenti, hogy megismételt mérés esetén az eredmény 95 %-os valószínűséggel a számított intervallumba esne. Kevesebb szórás (tehát pl. homogénebb csoport) esetén ez az intervallum kisebb is lehet.

Minden mérésnél beszélnünk kell a mérési hibáról. Egy mérés akkor jó, ha a legkisebb hibával dolgozik. A klasszikus tesztelmélet alaptétele szerint :

MÉRT ÉRTÉK = VALÓDI ÉRTÉK + MÉRÉSI HIBA.

A megbízhatósági együttható és a tanulói teljesítmények szórásának ismeretében könnyen meghatározható a mérési hiba: $\tau = 1{,}4$ pont , vagyis a tanulók közötti 1,4 ponttól kisebb eltérés nem számít szignifikáns különbségnek. Százalékban kifejezve ugyanez 2,3 %-os eltérésnek felel meg.

Vannak feladatok, amelyek megoldása a várt eredménytől néha nagy eltérést mutat, „nem úgy viselkednek, ahogy várnánk", ezért az esetek nagy részében a teszt összeállítói a hibásak. Nézzük meg, hogyan „viselkednek" az általunk vizsgált feladatok az összpontszámhoz viszonyítva (item-kritérium korreláció)! Szokás ezt az együtthatót elkülönítésmutatónak is nevezni, mert számszerűsíti, hogy a feladatra adott jó vagy helytelen válasz menynyire differenciálja a magas, illetve alacsony tesztösszpontszámú tanulókat. A szabadságfokból (a tanulók száma – 1) megállapított határérték szerint csakis a 0,1946-tól magasabb korrelációs együtthatóval rendelkező feladatokra mondhatjuk, hogy jól mérnek. (1. ábra)

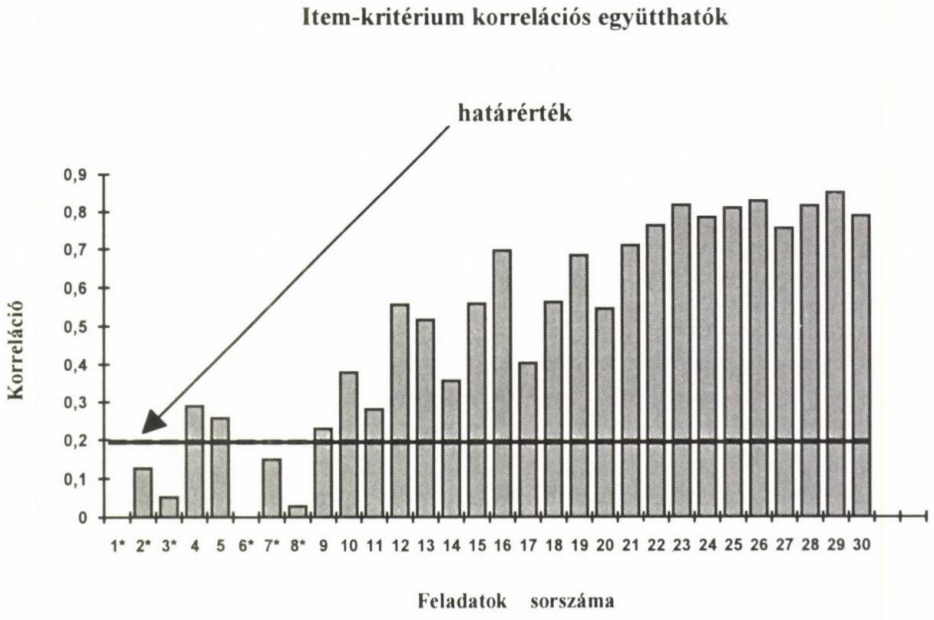
A feladatlapok standardizálása során a szabadságfoktól függő határértéktől alacsonyabb korrelációval rendelkező feladatokat (itemeket) ki kell hagyni a későbbi felhasználásból.

Jól észrevehető, hogy az 1 pontot érő feladatok (1-től-10-ig) – melyeket a „legyen a gyengébb tanulóknak is sikerélménye" elképzelés jegyében tettek a tesztbe – mennyire csökkentik a mérőeszköz megbízhatóságát,

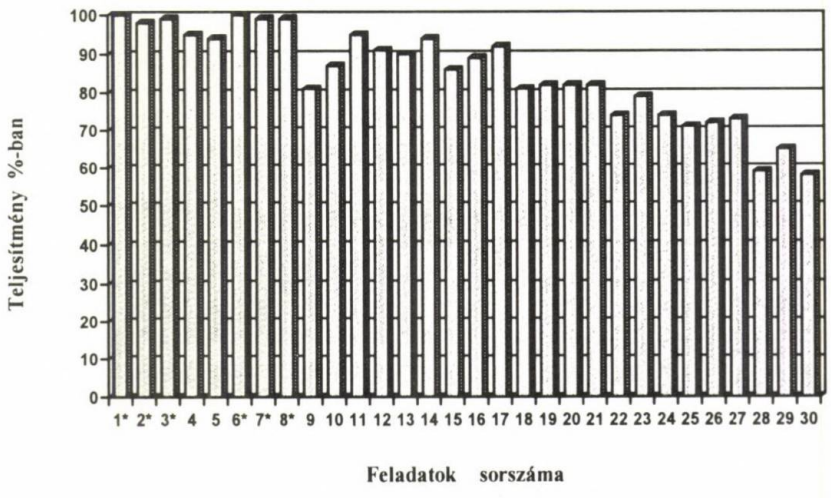
* G.F. KUDER ÉS M.W. RICHARDSON DOLGOZTÁK KI A TESZTFELEZÉSES MÓDSZEREK HELYETT.

míg a 3 pontot érők (21-től-30-ig) kifejezetten jól mérnek.

A rosszul mérő 6 db feladat (csillaggal jelzett) megoldottsága 99,16 %, ami a minta átlagára erős torzító hatást gyakorol.



1. ábra



2. ábra

A determinációs hatásokat vizsgálva, megfigyelhető, hogy az alacsony korrelációs együtthatóval rendelkező (tehát nem jól mérő) feladatok a teljes teszt varianciájához a vártnál sokkal kevesebb százalékban járulnak hozzá. (1. táblázat)

Az egész teszt működése szempontjából jelenlétük fölösleges, szerepük (mérési szempontból) elhanyagolható.

Az egyes feladatok nehézségi fokát tekintve a 30 feladatból 21 feladat kifejezetten könnyűnek mondható, mivel a nehézségparamétere 0,8-nél magasabb, 9 feladat átlagos nehézségű, mert a nehézségparamétere 0,58 és 0,79 közé esik. Nincs egyetlen feladat sem, amely 0,2 alatt lenne, tehát nehéznek tekinthető.

A feladatok értelmi műveleti szintek szerint ismeret (1 pontos), megértés (2 pontos) és alkalmazás, magasabb rendű művelet (3 pontos) típusúak voltak. A teljesítmények elemzésekor megállapíthatjuk, hogy az alkalmazást és magasabb szintű gondolkodást igénybevevő problémamegoldás az átlagos teljesítmény alatt van.(2.sz. táblázat)

Feladatok	Átlag %
1 pontos (10 db)	95,2
2 pontos (10 db)	88,2
3 pontos (10 db)	70,7
Az egész teszt	80,9

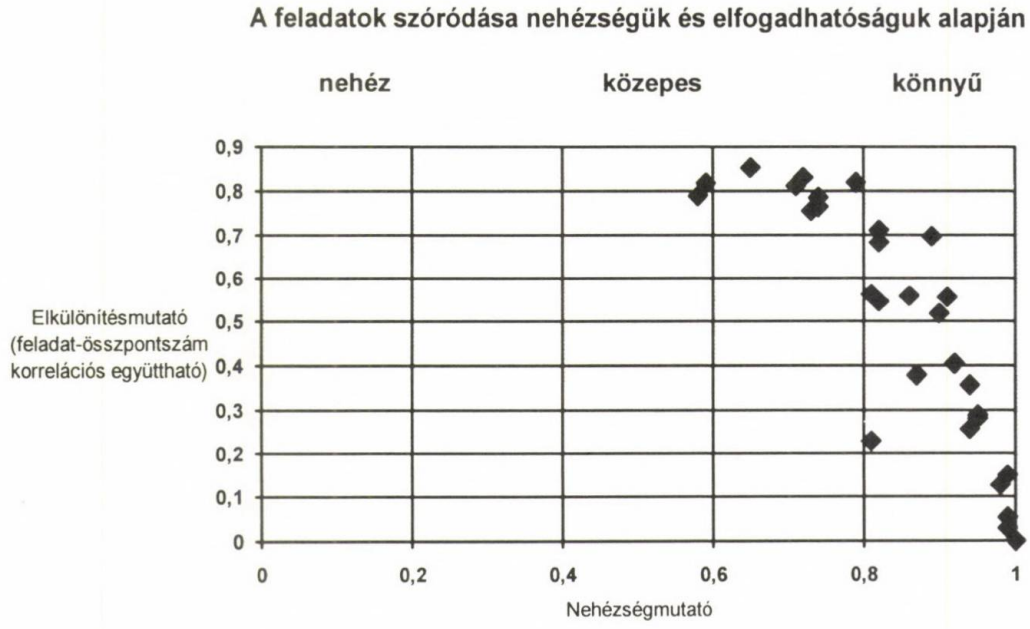
2. táblázat

A szummatív méréseknél normára orientált teszteket szoktak alkalmazni. Ennél a vizsgánál a teljesítmények eloszlása eltér a megszokott „Gauss-görbétől". J-típusú a függvénygörbe alakja, ami természetesen nem hiba, de arra lehet következtetni, hogy

vagy a feladatsor gyenge,
vagy a tanulók tudása kimagaslóan jó ,
vagy megkérdőjelezhető a mérés objektivitása (pl. adatfelvétel, javítás). (3. ábra)

A feladatsor szerkezeti felépítéséről kapunk további hasznos információkat, ha a feladatok két paraméterének – a nehézségmutatónak és az item-kritérium korrelációs együtthatónak – kapcsolatát ábrázoljuk egy koordinátarendszerben. (4. ábra)

3. ábra



4. ábra

Következtetések

Nem az volt a célunk, hogy e néhány nap alatt megtanítsuk a kollégákat a klasszikus tesztelmélet alapjaira, hanem szerettünk volna egy más szemléletet bemutatni. Úgy gondoljuk, sikerült a szakembereket meggyőzni arról, hogy az eredmények szakszerű interpretálásához nem elég ha kiszámítják a különböző átlagokat, esetleg a szórásokat, hanem mélyebb elemzésekre is szükség van egy minőségi elemzéshez.

A választott tematikát nagy érdeklődéssel hallgatták a kollégák, melyet sokszor estébe nyúló beszélgetések követtek. Tudatában vagyunk annak, hogy a mérésmetodika nem cél, hanem csak egy eszköz a megfelelő mérési lehetőségek kiválasztásához és az elsajátított tudásszint praktikus elemzéséhez, de azért szükségesnek tartjuk bizonyos szinten a mérési alapelvek betartását.

A konferencia tapasztalatait G.M. Litvinyenko miniszterhelyettes a következőkben foglalta össze:

1. Tudományos alapon kell megszerkeszteni az érettségi teszteket.
2. Az elemzésekből levont következtetésekről rendszeresen tájékoztatni kell a pedagógusokat.
3. Ki kell dolgozni, vagy meg kell vásárolni egy optimális rendszert és teszt-, feladat- vagy itembankot.
4. Ezeket az eszközöket hozzáférhetővé kell tenni a pedagógusok számára.
5. Meg kell ismerkedni más országok vizsgarendszereivel.
6. A hazai szakértőket külföldi tanulmányutakra kell küldeni, ahol ismereteiket gyarapíthatják.

Irodalom

[1] Falus Iván (szerk.): Bevezetés a pedagógiai kutatás módszereibe. Keraban Kiadó, Budapest, 1993. 277-316pp, 343-514pp.

[2] Horváth György: Bevezetés a tesztelméletbe. Keraban Kiadó, Budapest, 1993.

[3] Rozgonyiné Váradi Éva – Kindrusz Pál: A diagnosztikus vizsga egy lehetséges modellje. Iskolakultúra. IV. évf. 7.sz. 1994. 33-40.pp.

[4] Vajthó Erik: A szaktanácsadók pedagógiai vizsgálatának módszerei. OPI, Budapest, 1987.

Tóth Sándor

Geometriáról – játékosan

Mit tehet manapság az a matematikát oktató pedagógus, aki egy geometriai anyagrész tárgyalása során, avagy egyik-másik feladatmegoldás alkalmával azt veszi észre, hogy diákjainak egy része láthatólag nem érti azt, amiről előbb volt szó? Nyilvánvalóan megpróbálja ugyanazt még egyszer, még részletesebben elmagyarázni. Valahol ezután válik szét a matematikatanárok nagy családja aszerint, milyen lesz az alkalmazandó módszer a továbbiakban. Mert mi a helyzet, ha több gyereken még ez sem segít? Sajnos, ha az osztály vegyes összetételű a képességeket tekintve, esetleg már több hasonló kellemetlen tapasztalat volt, előkerül az az eszköz, hogy harmadszor is sor kerül az ismertetésre, csak most már erőteljesebb hangon. A félénkebb diákok ilyenkor döntenek úgy, hogy inkább mégis értik... Pedig de jó lenne, ha valami frappáns ötlet segítségével a lassabban gondolkodókon is segíthetnénk, könnyebben megérthetnék, láthatnák a problémákat, a megoldást! Geometriában ilyen szempontból jönne jól például olyan ábra, amiről leolvasható a lényeg, a megoldás „látszik".

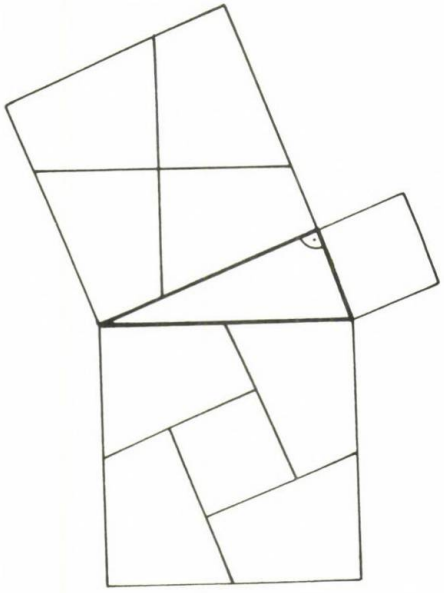
Ha az élénkebb eszű gyerekeinket olyan témakörökkel való foglalkozásra szeretnénk rábírni, melyek túlmutatnak a törzsanyag keretein, nem jó, ha a várható nehézségek tűnnek elő leghamarabb. Először kedvet kell csinálni a pluszmunkához, lehetőleg könnyed, játékos stílusban. Ezek után ugyanis nincs sok gond a késztetéssel, a téma kelleti magát. Ekkor sem árt olyan ötleteket keresnünk, melyek elősegítik ezt a folyamatot. Jó szolgálatot tesznek ekkor is a „látszik" típusú feladatok.

Minden előzetes kedvcsinálás ellenére az ilyen ötletek kiagyalásának van néhány hátránya. Az egyik például az, hogy a „látszik" típusú feladatok nagyban elősegítik ugyan a megértést, de a matematikai precizitás iránti igényeket nem mindig elégítik ki maradéktalanul. A másik lehet az, hogy rendkívül időigényes, sok egyéni elképzelésre van szükség, s a szakirodalmat sem szabad elhanyagolni. Ennek persze megvannak az anyagi vonzatai is. Ha tehát sok éven keresztül szeretnénk ezzel az eszközzel élni, akkor úgy érdemes eljárni, mint a nevelőmunka sok területén, azaz ki kell alakítani az igényt diákjainkban. Keressék a könnyed, szellemes megoldásokat. Egy jó képességű osztályban – a tanár és a diák közös munkájának eredményeképpen – egész csinos kollekció jöhet össze, melyet aztán használni, bővíteni lehet a későbbiekben.

Mielőtt sort kerítenék az általam „látszik" minősítésű problémák ismertetésére, két dolgot meg kell említenem. Az egyik annak hangsúlyozása, hogy érdemes megbízni tanítványainkban, mert egészen fantasztikus dolgokra is képesek, ha kedvet kapnak valamelyik témához. Ne féljünk tehát belevágni ebbe a kétségkívül munkaigényes vállalkozásba. A másik pedig az, hogy bár ezek a feladatok egy könnyed stílust képviselnek, a megértéshez nem elég a szem tevékenysége, szükség van az alapvető elméleti megalapozásra is!

1. A Pitagorasz-tétel

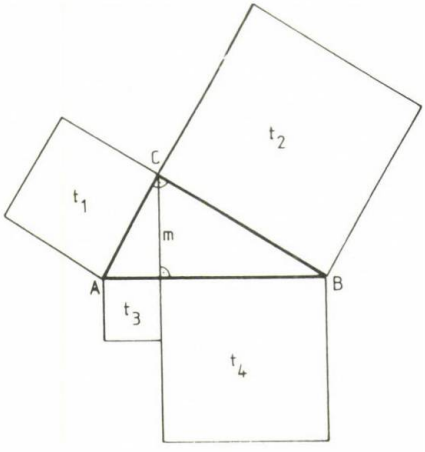
A tétel bizonyítására megvannak a hosszú ideje alkalmazott módszerek, s bizonyosan sokan fordítanak gondot a többféle bizonyítási lehetőség ismertetésére. Pedig bármilyen komoly eszköz is, bármennyire széles az alkalmazási lehetősége, lehetséges a bevezetése az általános iskola korábbi szakaszában is, mint a jelenlegi gyakorlat. Figyeljük meg jól az 1. ábrát! Hát nem azonnal „látszik" a tétel igazsága? Nevezetesen, hogy a derékszögű háromszög befogóira rajzolt négyzetek területének összege egyenlő az átfogóra rajzolt négyzet területével.



1. ábra

2. Alkalmazzuk a tételt!

Alkalmazási lehetőségként szinte mindenütt elsősorban a numerikus feladatok kerülnek elő. Pedig sokkal „barátságosabb" lenne, ha először a tétel megfogalmazására koncentrálnánk, s inkább nagyságrendi feladatokat vizsgálnánk, mint például a következő feladatban.



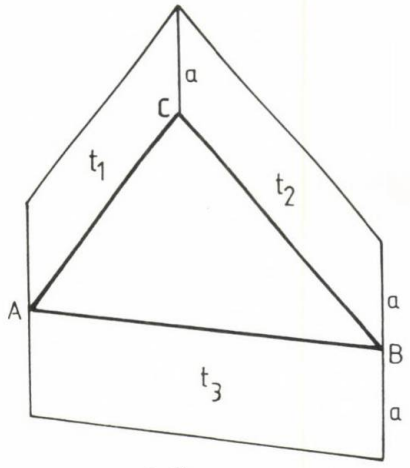
2. ábra

Feladat: Húzzuk meg a derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magasságát, s a befogókra szerkesztett négyzetek mellett, az átfogóra az ábra szerinti két négyzetet szerkesszük (2. ábra). Mit állíthatunk a jelölések mellett, a $t_1 - t_3$ és $t_2 - t_4$ területkülönbségekről?

Azonnal „látszik", ha szó szerint alkalmazzuk a tételt az eredeti háromszögből keletkező két, m befogójú derékszögű háromszögre, akkor minden számolgatás nélkül érthető, hogy a különbségek mindkét esetben a magasság fölé szerkesztett négyzet területével egyenlőek, így $t_1 - t_3 = t_2 - t_4$, a területkülönbségek tehát egyenlőek.

3. Egy általánosítási lehetőség

Némi késztetés után még a gyengébb képességű gyerekekben is felmerül, mi a helyzet akkor, ha a Pitagorasz-tételben szereplő feltételek közül egyet-kettőt megváltoztatunk? Ha az ez irányú vizsgálódásokat bátorítani akarjuk, megmutathatjuk például a 3. ábrán szereplő esetet, amikor a háromszög nem feltétlenül derékszögű, s az oldalakra meghatározott helyzetű paralelogrammákat rajzolunk.

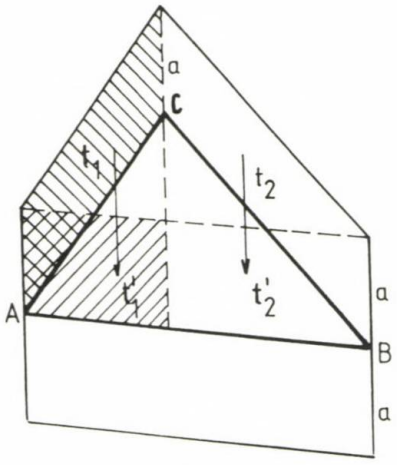


3. ábra

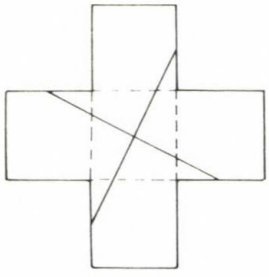
Tétel: A háromszög két oldalára szerkesztett (3. ábrabeli) paralelogrammák területösszege egyenlő a harmadik oldalra szerkesztett paralelogramma területével.

Bármilyen komoly a tétel, belátása a 4. ábra alapján teljesen nyilvánvaló, hiszen „látszik". Előtte azért nem árt hangsúlyozni azt a tényt, mely szerint ha két paralelogrammá-

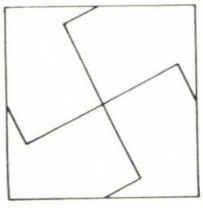
ban megegyezik egy oldalhossz és a hozzátartozó magasság, akkor a területük is egyenlő. Ezek után talán lehetőség van a Pappusz-tételhez eljutni egy tehetségesebb osztályközösségben.



4. ábra



a)



b)

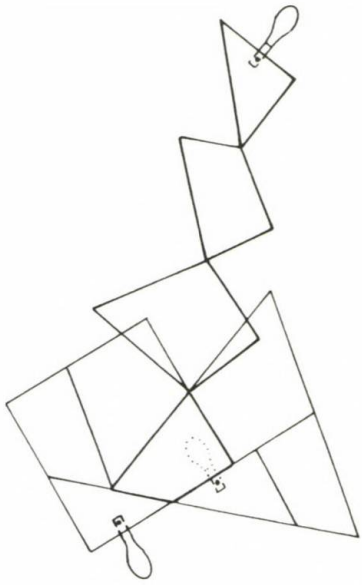
5. ábra

4. Egy négyzetes feladat

A játékosabb feldolgozások során többször előkerülhet az a kérdés, lehetséges-e több, egybevágó síkidomból egyet készíteni, lehetőleg ugyanolyan típusút. Tehát:

Kérdés: Lehetséges-e öt darab egybevágó négyzetet úgy feldarabolni, hogy belőlük egy négyzetet rakhassunk össze?

Bizonyos osztályokban már a megfelelő adatok is kideríthetők, de a fiatalabbaknál megelégedhetünk annak bemutatásával, hogy ez lehetséges. Az 5.a és 5.b ábrák tanulmányozása után, nem hiszem hogy bárki kételkedne ebben. Ezek után már természetes, hogy más síkidomokra is megfogalmazható a kérdés.



6. ábra

5. Egy hasznos segédeszköz

Keménypapírból, tű és cérna segítségével is megalkotható az a szemléltetőeszköz, melyet Dudeney, a matematikai játékok mestere alkotott, s amelynél én jobb ötletet nem ismerek annak szemléltetésére, milyen kapcsolat lehet különböző típusú síkidomok között, nevezetesen például minden négyzethez található olyan szabályos háromszög, mely vele egyenlő területű, és megfordítva. A 6. ábrán látható

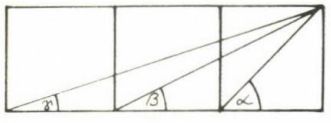
eszközön, ha a kart balra forgatjuk, akkor a részek négyzetté állnak össze, ha jobbra kezdjük, akkor szabályos háromszöggé. Érdemes megalkotására időt fordítani, mert óriási sikere van a gyerekek körében, itt aztán tényleg kézzelfoghatóan minden „látszik".

6. Szögösszeget keresünk

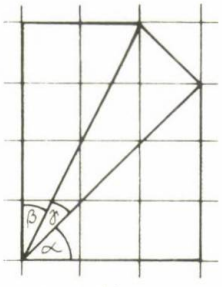
Az alábbi feladat közismert, megoldására már több numerikus módot mutattak.

Feladat: Ha három egybevágó négyzetet egymás mellé illesztünk, s a négyzetek bal oldali alsó csúcsait összekötjük a jobb oldali négyzet jobb felső csúcsával, három szöget kapunk (7.a ábra). Mekkora a három szög összege?

Némi hasonlósági alapismeretek után (ha egy háromszöget felnagyítunk, szögeinek nagysága nem változik), elkerülhetők a komoly eszközök. Elég a háromszögeket felnagyítani, s a 7.b ábrának megfelelően egy négyzetrácsos papírlapra elhelyezni. A szögösszeg jól láthatóan kilencven fokkal egyenlő.



a)



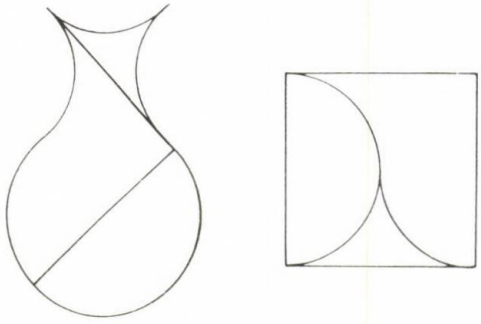
b)

7. ábra

Ha például kicsit szórakoztatóbb anyagrésszel való foglalkozásra akarjuk csábítani diákjainkat, mint például az átdarabolásokra, nem baj, ha ezt szellemes példákkal kezdjük. Geometriai szemléletjavító hatása miatt nem célszerű ezen anyag mellőzése, márcsak a tehetséggondozás miatt sem.

7. A váza és a négyzet

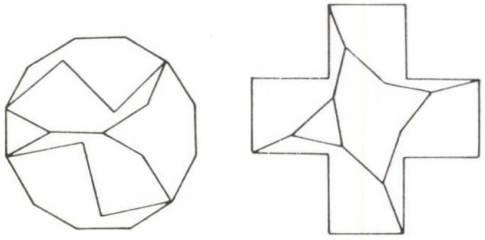
Ha feltesszük a kérdést, hogyan lehet egy vázából szögletes idomot készíteni, a legkézenfekvőbb, de nem legkomolyabb válasz az, ha leejtjük. Matematikai szempontból azonban ettől precízebb megoldás is elképzelhető, s ezt a 8. ábra mutatja is.



8. ábra

8. A magyar futball

Valóság vagy nem valóság, honi labdarúgásunk helyzetének szemléltetésére alkalmas a 9.a és 9.b ábra. Igaz, hogy a labda kissé szabálytalan, egy szabályos tizenkétszög szemlélteti, a végkifejlet pedig morbid, de matematikai szempontból briliáns az átalakítás, jókedvet teremt az órán.



a) *b)*

9. ábra

Most csak néhány témakört érintettünk a „látszik" típusú feladatok bemutatása során, s ezek is több osztályban alkalmazhatók, azért remélem elhiszi mindenki, az alkalmazási lehetőségek ennél sokkal szélesebbek. Ezúttal azonban elsődleges cél a kedvcsinálás volt, még ha reménykedem is abban, hogy a jövő-

ben esetleg többet olvashatunk majd az ez irányú tapasztalatokról.

Irodalom

[1] Hardy R.: Geometriai játékok. Műszaki könyvkiadó, Budapest, 1986.

[2] Róka S.: Abacus-füzetek. 1. szám, Nyíregyháza, 1994.

[3] Geometriai feladatok gyűjteménye I. Tankönyvkiadó, Budapest

[4] Róka S.: 1000 feladat az elemi matematika köréből. Typotex, 1992.

[5] Elemi matematikai feladatgyűjtemény I. Egyetemi jegyzet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1980.

Somogyi László

Matematika határok nélkül
(Beszámoló egy nemzetközi matematikaversenyről)

Az elmúlt tanévben már másodszor vehettek részt magyar középiskolások a „Matematika határok nélkül – Mathematiques sans frontieres" nemzetközi vetélkedőn. E verseny több szempontból is új színt jelent a hazai vetélkedők kínálatában, s ennek is köszönhető népszerűsége.

A verseny Európa fővárosából, Strasbourgból indult hat évvel ezelőtt, s a tavalyi tanévben már 18 ország több mint 60 000 diákja vett benne részt – köztük 3000 magyar középiskolás.

A „Matematika határok nélkül" célkitűzései között szerepel többek között a matematika népszerűsítése, a csoportmunkára való ösztönzés, az idegen nyelv tanulásának támogatása, a népek közötti megértés, az európai gondolat erősítése. Mindezek tükröződnek a verseny szervezésében, a kitűzött feladatok jellegében.

A versenyen csak egész osztályok vehettek részt – a tavalyi tanévben budapesti 1. osztályos (9. évfolyam) középiskolások. A 15 feladatot az osztályok tanulói együttesen oldották meg szabadon szervezve munkájukat. A feladatok nehézségi foka változatos képet nyújtott, így mindenki talált a tudásának, képességeinek megfelelőt, mely megoldásával hozzájárulhatott az osztálya teljesítményéhez.

A feladatok közül az egyiket idegen nyelven tűzték ki, s a megoldást is így kellett megadni.

A részt vevő osztályok felkészülését szolgálta a versenyt 2 hónappal megelőző próbaforduló. Ekkor a versennyel azonos körülmények között, azonos jellegű feladatokkal edzhettek a résztvevők. Az osztályt tanító tanár ekkor segíthetett tanácsaival a munka szervezésében, a megoldások leírásában, ellenőrzésében stb. A próba-forduló eredménye sehol sem számít a végeredménybe.

A verseny ideje alatt a részt vevő osztályok tanárai egy másik középiskola versenyző osztályánál felügyeltek, így volt biztosítható a verseny tisztasága.

Az évad lezárásaképpen az érintett tanárok tapasztalatcserére összegyűltek. Az elhangzott véleményekből álljon itt néhány:

- a feladatok újszerűek, érdekesek voltak
- a gyerekek élvezettel dolgoztak, felfedezhették az együttes munka örömét a matematika területén is, bennük is megfogalmazódott, hogy a 2. osztályok (10. évfolyam) számára is meg kellene hirdetni a versenyt
- a tanárok új oldalukról ismerhették meg tanítványaikat, valamint felügyelőként betekinthettek egy kicsit más intézmény életébe.

A verseny szervezése

A verseny központja Strasbourgban van. Ide futnak be a részt vevő országok javasolt feladatai, s itt kerül véglegesítésre a próbaforduló és a verseny feladatsora.

Az egyes országokban nemzeti versenybizottság szervezi a versenyt. Van, ahol – pl. Spanyolországban – az oktatási minisztérium, máshol (pl. Olaszországban, Franciaországban és Németországban) a tartományok támogatják a versenybizottság munkáját. Magyarországon éppúgy, mint pl. Svájcban, öntevékeny tanárokból állt össze a versenyt szervező csapat. E bizottságok teremtik meg az anyagi hátteret, fordítják le a feladatokat az adott ország nyelvére, javítják a dolgozatokat és hirdetnek eredményt. Maga a verseny minden országban ugyanazon a napon zajlik, közös a feladatsor, országok közötti összehasonlítás azonban nincs.

A vetélkedő szervezői ugyanis nem a versenyre helyezik a hangsúlyt, hanem a neve által is jelzett célkitűzés elérésére.

Magyarországon az elmúlt két évben a SOROS Alapítvány nagyvonalú támogatása tette lehetővé a verseny szervezését, lebonyolítását, magyar diákok és tanárok részvételét a franciaországi eredményhirdetésen, képviseletünket a verseny közgyűlésén.

Az elmúlt tanévben további támogatók is jelentkeztek: a Safari-park (Gansendorf) ingyenes belépőt ajánlott fel az első helyezett osztályok diákjainak, a Nemzeti Tankönyvkiadó RT. pedig fejenként 1000-1000 Ft-os könyvjutalmat a második helyezetteknek.

A verseny jövője

Az elmúlt két év visszhangja alapján úgy tűnik, hosszútávon érdemes számolni a „Matematika határok nélkül" hazai jelenlétével. Ehhez azonban egyrészt biztosítani kell a verseny anyagi hátterét, másrészt ki kell építeni a verseny hazai szervezetét.

Az előbbi érdekében most alakul a „Matematika határok nélkül" közcélú alapítvány, mely lehetővé tenné, hogy szponzorok, támogatók anyagi segítséget nyújtsanak a versenynek.

Ami pedig a szervezést illeti, a versenybizottság jelenlegi összetételében csak Budapesten tudja megrendezni a versenyt. Vidéki terjeszkedésre csak akkor van lehetőség, ha érdeklődő tanárok megszervezik saját városukban, illetve annak vonzáskörzetében a versenyt (melyhez a versenybizottság segítséget nyújt; címe: 1133 Bp. Kárpát u. 49-53., Berzsenyi Dániel Gimnázium).

Matematika feladatmegoldó pontverseny

A megyei versenyek lebonyolításához területi szervező kollégák jelentkezését várjuk.

Mozaik Oktatási Stúdió
Vassné Németh Katalin
tel.: 62 - 310 913

II. forduló

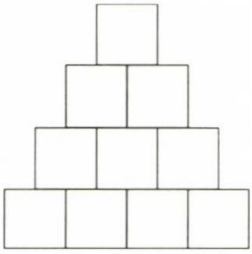
Kitűzött feladatok 11-12 éveseknek (5-6.osztály)

95.25. Az 5, 7, 11 egymást követő törzsszámok és összegük: 5 + 7 + 11 = 23 is törzsszám. Keress minél több példát három egymást követő törzsszámra, amelyek összege is törzsszám!

95.26. Két város között egy 555 kilométer hosszú utat építettek. Az út mellett kilométerenként oszlopokat helyeztek el, amelyekre két-két számot írtak, az oszlopoknak az egyes városoktól mért távolságát. Például 0–555, 1–554, 2–553 és így tovább. Hány olyan oszlop van, amelyre csak kétféle számjegyet kellett írni?

95.27. Az ábrán látható keretekbe írjuk be a 0, 1, 2, 3, ..., 8, 9 számjegyek mindegyi-

két pontosan egyszer úgy, hogy a vízszintes sorokban olvasható tízes számrendszerbeli számok mindegyike osztható legyen 3-mal is és 13 -mal is!



95.28. Barnabás egy öreg íróasztal fiókjában talált egy régi kopott vonalzót. Megállapította, hogy a vonalzó hossza éppen 13 cm és a beosztások nagy része lekopott, csak 4 helyen maradt meg a vonalzón a beosztás a hozzá tartozó értékekkel. Néhány próbálgatás után Barnabás észrevette, hogy a megmaradt beosztások felhasználásával a vonalzó két megfelelő pontja között bármely, 1 és 13 cm közti egész centiméter hosszúság mérhető. Melyek lehettek a megmaradt beosztások?

Kitűzött feladatok 13-14 éveseknek (7-8. osztály)

95.29. Döntsük el, hogy a következő szám négyzetszám-e!

$$1991 \cdot 1993 \cdot 1995 \cdot 1997 + 16.$$

95.30. Az 1, 2, 3, ..., 48, 49 számokat osszuk 7 egyenlő csoportba úgy, hogy minden csoportban ugyanannyi legyen a számok összege! Általánosítsunk!

95.31. Az ABC háromszögből ismerjük az AB, BC és CA oldalon azokat a P, Q, R pontokat, amelyek a megfelelő oldalakat harmadolják, azaz

$$AP : PB = BQ : QC = CR : RA = 1 : 2.$$

Szerkesszük meg a P, Q, R pontok ismeretében az ABC háromszöget!

95.32. Adjunk meg olyan pozitív egész számokat, amelyekre igaz, hogy előállíthatók két különböző pozitív osztójuk összegének kétszereseként! (Például: $6 = 2 \cdot (1 + 2)$.)

A versenyfelhívás A matematika tanítása 1995. évi 4. számában olvasható. A megoldásokat a következő címre kérjük küldeni:

MOZAIK Oktatási Stúdió
6701 Szeged, Pf. 301.

A borítékra kérjük, írják rá: Matematika feladatmegoldó pontverseny.
A beküldési határidő: **1995. december 31.**

Feladatrovat tanároknak

Rovatvezető: **Kosztolányi József**

A megoldásokat kérjük a rovatvezető címére küldjék: 6721 Szeged, Pusztaszeri u. 17. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljék. Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak a megoldásait is) külön lapra írják tollal vagy írógéppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsák össze, és külső felére írják rá a feladat számát és a megoldó nevét! Csatoljanak a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat a kitűzést követő negyedik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük. **Beküldési határidő:**

1996. január 31.

55. Egy, a női egyenjogúságért küzdő feminista mozgalom képviselői a következőt javasolták: A jegygyűrűk a jövőben készüljenek úgy, hogy egy tömör aranygömböt középen átfúrnak, mégpedig oly módon, hogy a hengerszerű furat tengelye illeszkedjen a gömb középpontjára. Így a gömb sugarát és a furat

átmérőjét változtatva elérhető, hogy mindenki találjon az ujjára való és a pénztárcájának megfelelő gyűrűt.

Igaz-e, hogy ha a figyelmes vőlegény menyasszonyának és magának azonos szélességű gyűrűt választ, akkor azok értékben (térfogatban) is megegyeznek?

Blázsik Zoltán, Szeged

56. Mekkora a legkisebb szöge annak a deltoidnak, amely húrnégyszög, továbbá a beírt és a köré írt kör területének aránya 1 : 6?

Fitos László, Esztergom

57. Valamilyen módon sorba állítunk 37 embert. Igaz-e, hogy kiléptethető közülük 7 úgy, hogy ők az eredeti helyüknek megfelelő sorrendben valamelyik irányból nézve nagyság szerint állnak sorban?

58. Legyenek A', B', C' az ABC háromszög BC, CA, AB oldalainak belső pontjai úgy, hogy

$$\frac{A'B}{A'C} = p, \qquad \frac{B'C}{B'A} = q, \qquad \frac{C'A}{C'B} = r,$$

ahol p, q, r pozitív számok. Igazoljuk, hogy

$$T_{A'B'C'} \le \frac{1+pqr}{8\sqrt{pqr}} T_{ABC}.$$

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

59. Bizonyítsuk be, hogy bármely 2-nél nemkisebb n egész szám és tetszőleges $z_1, z_2, \ldots, z_n$ komplex számok esetén teljesül, hogy

$$\sum_{i=1}^{n} |S - z_i| \le \sum_{i=1}^{n} |z_i| + |S| \cdot (n-2),$$

ahol $S = z_1 + z_2 + \ldots + z_n$.

András Szilárd, Csíkszereda

60. Az $ax^2 + bx + c$ másodfokú polinom együtthatóit válasszuk véletlenszerűen egyenletes eloszlás szerint úgy, hogy $a \in [0;1]$, $b \in [0;1]$ és $c \in \left[0; \frac{1}{3}\right]$. Mi a valószínűbb: az, hogy az egyenletnek létezik valós gyöke vagy az, hogy nem létezik?

Blázsik Zoltán, Szeged

Feladatmegoldások (37-42. feladatok)

37. Létezik-e két olyan hétjegyű szám, amelyek mindegyikében az első hét pozitív egész számjegyként szerepel és egyikük a másiknak többszöröse?

Math. Challenge 1977-78.

Megoldás: Tegyük fel, hogy a és b a feladat feltételeinek megfelelő két különböző hétjegyű szám, és legyen $a|b$. Mivel a és b ugyanazon számjegyekből áll, ezért 9-cel való osztáskor azonos maradékot adnak. Ebből adódóan $9|b-a$. Másrészt a feltételből kapjuk, hogy $a|b-a$. Minthogy mindkét szám számjegyeinek összege 28, ezért egyik sem osztható 3-mal, amiből következik, hogy 9 és a relatív prímek, azaz $9a|b-a$. Viszont $b-a$ legfeljebb hétjegyű, míg $9a$ nyolcjegyű, ami nyilvánvaló ellentmondás.

Tehát nincs két megfelelő tulajdonságú hétjegyű szám.

Csete Lajos, Markotabödöge

A megoldók száma: 14.

38. Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok olyan x, y és z valós szám létezik, amelyekre az

$$a = x + y + z, \quad b = xy + yz + xz, \quad c = xyz$$

számok közül valamelyik kettő racionális, a harmadik pedig irracionális!

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

Megoldás: Tekintsük a $P(x) = x^3 - x$ polinomfüggvényt! Ennek a $-\frac{1}{\sqrt{3}}$-ban helyi maximuma, míg az $\frac{1}{\sqrt{3}}$-ban helyi minimuma van és $P\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$, $P\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$.

Legyen $Q_c(x) = P(x) + c$, és legyen $|c| < \frac{2}{3\sqrt{3}}$. Ekkor a $Q_c(x) = 0$ egyenletnek

három valós gyöke lesz. Felírva a Viéte-féle összefüggéseket, a fenti egyenlet gyökeire a következőket kapjuk:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0,$$
$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = -1,\ x_1x_2x_3 = -c.$$

Minthogy a $\left(-\frac{2}{3\sqrt{3}}; \frac{2}{3\sqrt{3}}\right)$ intervallumban végtelen sok irracionális szám van, ezért valóban végtelen sok, a feladat feltételeinek megfelelő számhármas van.

Megjegyzés: Az előbbi gondolatmenet – alkalmas polinomfüggvény választásával – kiterjeszthető több számra is. Teszőleges $n \geq 3$ esetén végtelen sok olyan valós szám n-es van, hogy a belőlük képezhető elemi szimmetrikus összegek közül pontosan k irracionális.

András Szilárd, Csíkszereda

Megjegyzés: A beküldött megoldásokban a legtöbbször előforduló konstrukció a következő volt. Legyen m olyan pozitív egész szám, ami nem négyzetszám és legyen $x = y = \sqrt{m}$, $z = -2\sqrt{m}$. Könnyen látható, hogy végtelen sok, a feltételnek megfelelő számhármast kapunk így.

A megoldók száma: 13.

39. Számítsa ki az S_{1995} értékét ezred pontossággal, ha

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}!$$

Kocsis Orsolya, Szolnok

I. megoldás: Az összeg általános tagja átalakítható a következőképpen:

$$\frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{4k^2-1}{4(2k-1)(2k+1)} +$$
$$+ \frac{1}{4(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4(2k-1)(2k+1)}.$$

A második törtet parciális törtekre bontva kapjuk:

$$\frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right).$$

Ezt beírva az összegzésbe, és figyelembe véve, hogy a k-t tartalmazó tagok összege teleszkopikus, azt kapjuk, hogy

$$S_n = \frac{n}{4} + \frac{1}{8}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right) =$$
$$= \frac{n}{4} + \frac{1}{8}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}.$$

Behelyettesítve:

$$S_{1995} = \frac{3982020}{7982} \approx 498{,}875.$$

Kiss Géza, Kisújszállás

II. megoldás: Az első néhány S értéket felírva $\left(S_1 = \frac{1}{3}, S_2 = \frac{3}{5}, S_3 = \frac{6}{7}, S_4 = \frac{10}{9}\right)$ megfogalmazható sejtés:

$$S_n = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{2n+1} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}.$$

Sejtésünket teljes indukcióval bizonyítjuk.

(*i*) $n=1$ esetén igaz a sejtés.

(*ii*) Tegyük fel, hogy valamely $n \geq 1$ esetén igaz az állítás!

$$S_{n+1} = S_n + \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+3)} =$$
$$= \frac{n(n+1)}{2(2n+3)} + \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+3)} =$$
$$= \frac{(n+1)(2n+1)(n+2)}{2(2n+1)(2n+3)} = \frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)},$$

tehát sejtésünk igaz.

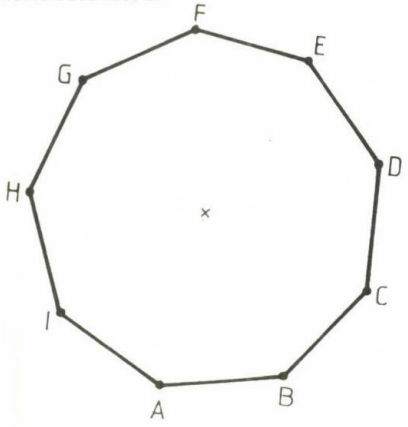
Csorba Ferenc, Győr
Horváth Géza, Zselíz

A megoldók száma: 13.

40. Egy szabályos kilencszög minden csúcsát pirosra vagy zöldre színeztük. Bármely 3 csúcs egy háromszöget határoz meg. Egy ilyen háromszöget aszerint nevezünk pirosnak vagy zöldnek, hogy csúcsai mind pirosak, vagy mind zöldek. Bizonyítsuk be, hogy a kilencszög bármely, említett színezése mellett van legalább két különböző, de egybevágó azonos színű háromszög!

Ambrus Gabriella, Budapest

I. megoldás: A kilenc csúcs közül öt biztosan azonos színű, mondjuk piros, és ezek között biztosan van két szomszédos. Legyen ez a két szomszédos piros csúcs A és B. Aszerint, hogy az AB oldal felezőmerőlegesére illeszkedő F csúcs piros vagy zöld, két esetet kell megkülönböztetnünk.



1. ábra

1. Az F csúcs zöld. Ekkor, ha az AB felezőmerőlegesére szimmetrikusan elhelyezkedő csúcsok közül valamelyik kettő piros, akkor találtunk két megfelelő háromszöget. Legyen például H és D piros. Az ABH és az ABD háromszögek eleget tesznek a feladat követelményének.

Ha a fenti szimmetria nem teljesül, akkor vagy van az F-en átmenő szimmetriatengely egyik oldalán két szomszédos piros csúcs, vagy az egyik oldalon két piros csúcs egy zöldet fog közre, míg a másik oldalon ennek épp az inverze teljesül. Az első esetben legyen C és D a két szomszédos piros csúcs. Ekkor az ABD és az ACD háromszögek megfelelőek. A másik esetben legyenek C, E és H pirosak. Itt az ABE és a BCH megfelelő háromszögek lesznek.

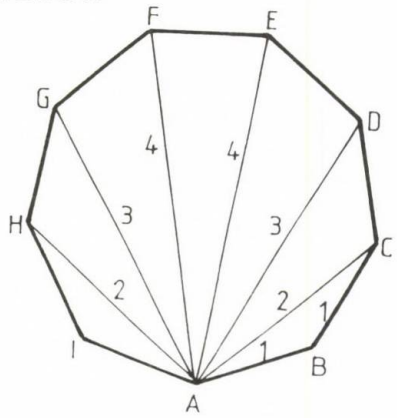
2. Tegyük fel, hogy F piros! Ha az AB felezőmerőlegesére szimmetrikusan van két piros csúcs, vagy ha a tekintett szimmetriatengely valamelyik oldalán van két szomszédos piros csúcs, akkor az 1. esethez hasonlóan találunk megfelelő háromszögeket. Akkor is találunk, ha F valamelyik szomszédja piros, ugyanis, ha például G piros, akkor az ABG és az AFG megfelelőek. Ha az előző helyzetek egyike sem áll fenn, akkor vagy a C és a H vagy a D és az I pirosak. Ha például C és H piros, akkor az ACH és az AFH megfelelő háromszögek.

Minden esetet kimerítettünk, így a feladat állítását beláttuk.

András Szilárd, Csíkszereda
Kocsis Orsolya, Szolnok

II. megoldás: Két színnel színeztünk, így létezik legalább 5 azonos színű pont és legalább $\binom{5}{3} = 10$ azonos színű háromszög. Számoljuk meg, hány különböző háromszög létezik a szabályos kilencszögben.

Valamely csúcsot a többiekkel összekötve 4 különböző távolság adódik, jelölje ezek „hosszát" 1, 2, 3, 4 a valódi hosszaknak megfelelő sorrendben. Ebben az értelemben a keletkező háromszögek k „kerületére" fennáll, hogy $4 \le k \le 9$.



2. ábra

Ezek után vizsgáljuk meg, hogy milyen „oldalhosszúságú" háromszögek léteznek.

$9 = 4 + 4 + 1 = 4 + 3 + 2 = 3 + 3 + 3$, s ezek mindegyike létezik is, például AEF, ADF és ADG háromszögek.

$8 = 4 + 3 + 1 = 4 + 2 + 2 = 3 + 3 + 2$. Ezek közül az első kettő létezik (például ADE és ACE háromszögek), míg a harmadik típusú háromszög nem létezik.

$7 = 4 + 2 + 1 = 3 + 2 + 2 = 3 + 3 + 1$. Ilyen háromszögek nem léteznek.

$6 = 4 + 1 + 1 = 3 + 2 + 1 = 2 + 2 + 2$. Innen csak a középső létezik (például az ACD

háromszög).

$5 = 3 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1$. Egyikhez sincs megfelelő háromszög.

$4 = 2 + 1 + 1$. Ilyen típusú háromszög van, például az ABC háromszög.

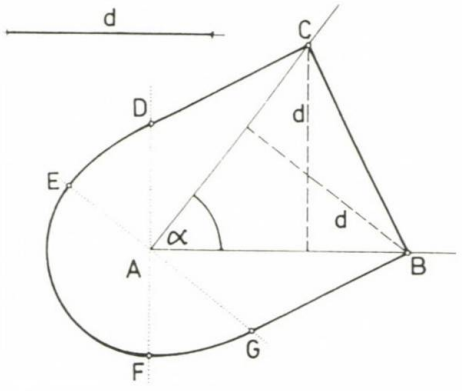
A szabályos kilencszögben 7 különböző típusú háromszög van, és mivel az egyik színből legalább 10 különböző egyszínű háromszög található, ezért biztosan van két egybevágó, azonos színű háromszög.

Csorba Ferenc, Győr

III. megoldás: (A feladat kitűzőjének megoldása.)

A kilencszög kilenc csúcsa közül legalább öt azonos színű. Vegyünk öt ilyen azonos színű csúcsot. E csúcsokkal mint végpontokkal, 10 különböző szakasz képezhető. E szakaszok szakaszfelező merőlegesei átmennek a kilencszög körülírt körének középpontján, valamint egy további csúcson is, mivel a kilencszög szabályos és páratlan számú csúcsa van. Így a 10 szakaszfelező merőleges közül legalább kettő átmegy a kilenc csúcs valamelyikén. Az e szakaszokhoz tartozó végpontok tehát egy szimmetrikus trapézt alkotnak, amelynek csúcsai közül kiválaszthatók a feladat feltételének megfelelő háromszögek csúcsai.

A megoldók száma: 11.



3. ábra

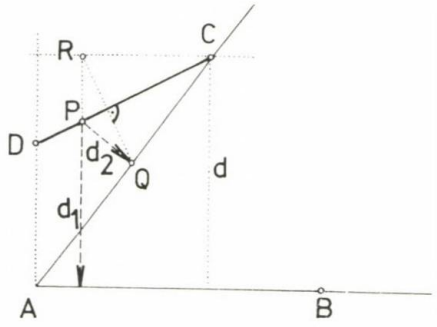
41. Adott a $0 < \alpha < \pi$ szög, és egy $0 < d$ állandó. Mi a sík azon P pontjainak mértani helye, amelyeknek az α szög száraitól való távolságának az összege d?

Szeredi Éva, Budapest

Megoldás: Ha az α hegyesszög, akkor a keresett mértani hely a *3. ábrán* látható módon három szakaszból (GB, BC, CD), két parabolaívből (DE és FG), valamint egy $\frac{d}{2}$ sugarú körívből áll. A bizonyítást az egyes részekre külön-külön végezzük el.

1. A mértani hely egyik eleme az a BC szakasz, amelynek végpontjai az adott szög szárain helyezkednek el, és ezért a másik szögszártól éppen d távolságra vannak. A szakasz minden pontja eleme a mértani helynek, ugyanis bármely P belső pontra felírva az ABP és az APC háromszögek területét, majd ezek összegét egyenlővé téve az ABC háromszög területével, rögtön adódik, hogy a P szögszáraktól vett távolságösszege d. A háromszög-egyenlőtlenség segítségével gyorsan igazolható az is, hogy a szögtartomány más belső pontja nem rendelkezhet az adott tulajdonsággal.

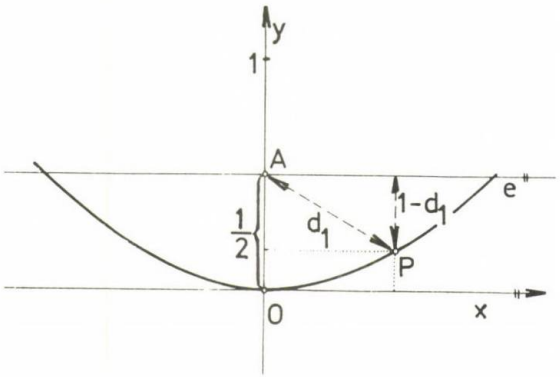
2. A mértani hely másik eleme az a CD szakasz, amely az AC szögszárral $\frac{\alpha}{2}$ szöget zár be, miközben a D pont rajta van az AB-re állított merőlegesen. *(4. ábra)*



4. ábra

A DC szakasz tetszőleges P pontja az AB szögszártól d_1, az AC szögszártól d_2 távolságra van. A d_2 szakasz talppontját az AC szögszáron jelöljük Q-val. Tükrözzük a Q pontot a DC egyenesre, és legyen a tükörkép R. A tükrözés miatt $PR = PQ = d_2$ és $RPC\sphericalangle = QPC\sphericalangle$. Mivel a PCR és a PCQ há-

romszögek egybevágók, ezért a PC egyenes felezi az RCQ szöget. d_1 és d_2 szöge α, ezért $QRP\sphericalangle = RQP\sphericalangle = \frac{\alpha}{2}$. Így az előzőeket figyelembe véve $QRC\sphericalangle = RQC\sphericalangle = 90° - \frac{\alpha}{2}$ és $RCQ\sphericalangle = RCA\sphericalangle = \alpha$. Ebből pedig adódik, hogy az RC egyenes párhuzamos az AB egyenessel. Már láttuk, hogy PRC szög derékszög, így $d_1 + PR = d_1 + d_2 = d$. A GB szakaszról hasonlóan bizonyítható, hogy a mértani hely része.



5. ábra

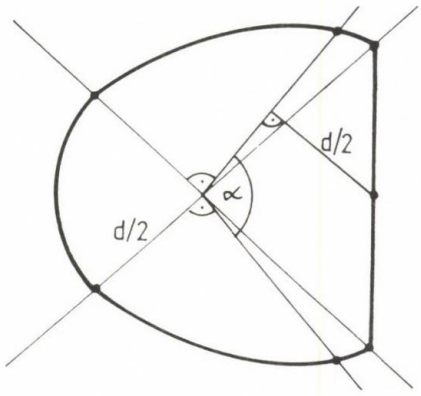
3. A DAB illetve a CAG derékszögekből kilépve, de az EAC illetve az FAB derékszögeken belül maradva olyan pontokat keresünk, amelyeknek egy egyenestől (félegyenestől) és egy ponttól (az A ponttól) mért távolságainak összege a d érték. Azt fogjuk bizonyítani, hogy azon pontok halmaza, amelyeknek egy egyenestől és az egyenes egy adott pontjától mért távolságainak összege állandó, egy parabola. Tegyük fel, hogy $d=1$, legyen a tekintett egyenes e, és az A pontot helyezzük el egy koordináta-rendszer y tengelyének $\frac{1}{2}$ ordinátájú pontjába! (*5. ábra*)

Ha a P pont az A-tól d_1 távolságra van, akkor az e egyenestől $1 - d_1$ távolságra van. A P pont koordinátái tehát

$$x = \sqrt{{d_1}^2 - (1 - d_1)^2}, \qquad y = d_1 - \frac{1}{2}.$$

Innen $y = \frac{x^2}{2}$, ami valóban egy parabola egyenlete.

4. Könnyen látható, hogy az EAC és az FAB derékszögeken túl csak az A középpontú, $\frac{d}{2}$ sugarú körív pontjai felelnek meg a feltételnek.



6. ábra

Ha α derékszög, akkor könnyen igazolható, hogy a mértani hely egy szakaszból, két parabolaívből és egy körívből áll. A szakasz végpontjai a derékszög csúcsától d távolságra vannak. A parabolaív a szögszárnak abból a pontjából indul ki, amely d-re van a derékszög csúcsától, és a másik szögszár meghosszabbításán, a csúcstól $\frac{d}{2}$ távolságra szakad meg, és megy át egy $\frac{d}{2}$ sugarú negyedkörívbe.

Ha α tompaszög, akkor a mértani hely egy szakaszból , négy parabolaívből és egy körívből áll.

Állítsunk mindkét szögszárra a csúcsból merőlegest! A mértani hely egyik részét alkotó szakasznak ezeken a merőlegeseken lesznek a végpontjai. Ennek a szakasznak a középpontja mindkét szögszártól $\frac{d}{2}$ távolságra van. Az első parabolaív-pár ezekből a szakaszvégpontokból indul, és egészen a szögszárakig terjed. A szögszárat a szög csúcsától d távolságra levő pontban éri el. Innen egy újabb parabolaív in-

dul addig az egyenesig, amely ugyanerre a szögszárra merőleges, és a merőlegesnek abban a pontjában végződik, amely a szög csúcsától $\frac{d}{2}$ távolságra van. A két merőleges közt (a szögön kívül) egy A középpontú, $\frac{d}{2}$ sugarú körív köti össze az utóbbi parabolaívek végpontjait. *Horváth Géza, Zselíz*

Megjegyzések:

1. A szög csúcsát az origóba helyezve, szárait pedig alkalmasan választva a kért mértani hely minden egyes esetben meghatározható koordináta-geometriai eszközökkel is. Egy ilyen megoldást küldött *Csorba Ferenc* Győrből. Minthogy a feladat teljes diszkussziója ezzel a módszerrel is igen terjedelmes, ezért helyhiány miatt az egyébként szép megoldást nem áll módunkban közölni.

2. A feladat abban az esetben jóval egyszerűbb, amikor a távolságösszeget a szögszárak egyeneseitől mérjük. Minthogy azonban a szög szárain a szög csúcsából kiinduló félegyeneseket értjük, a fenti, kicsit hosszadalmasnak tűnő elemzés nem kerülhető el.

A megoldók száma: 11.

42. Egy szegény legény 99 zsák aranyból választhat magának akármennyit, de csak akkor kapja meg ezeket, ha mérlegre téve, a kiválasztottak összsúlya egész szám. A mérleg csak egész kilogrammokat mutat, és az egy dekagrammos eltérést már nem észleli. A zsákok egyenlő súlyúak és a legény egyiket mérlegre téve látta, hogy ezt még nem viheti haza. Gazdagon távozott-e a legény?

Tóth Sándor, Sárospatak

Megoldás: Jelöljük x-szel egy zsák súlyát! A legény akkor viheti el a mérlegen levő zsákokat, ha azok összsúlya a $\left(k-\frac{1}{100};k+\frac{1}{100}\right)$ intervallumba esik valamely alkalmas k pozitív egészre.

A legény mérhet 1, 2, ... , 99 zsákot. Kimutatjuk, hogy az $\{x\},\{2x\},\ldots,\{99x\}$ számok valamelyike vagy a $\left[0;\frac{1}{100}\right)$ vagy a $\left[\frac{99}{100};1\right)$ intervallumba esik, azaz valamelyik mérési eredmény lehetővé teszi, hogy gazdagon távozzon.

Tekintsük a $[0;1)$ intervallum következő felosztását:

$$[0;1)=\bigcup_{k=1}^{100}\left[\frac{k-1}{100};\frac{k}{100}\right).$$

Ha az $\{x\},\{2x\},\ldots,\{99x\}$ számok közül van kettő (legyenek ezek $\{mx\}$ és $\{nx\}$, ahol $m>n$), amelyek ugyanabba a részintervallumba esnek, akkor

$$-\frac{1}{100}<\{mx\}-\{nx\}<\frac{1}{100}.$$

Ekkor viszont

$$(m-n)x=[mx]-[nx]+\{mx\}-\{nx\},$$

azaz a legény m-n darab zsákot hazavihet.

Ha az $\{x\},\{2x\},\ldots,\{99x\}$ számok között nincs kettő, amely ugyanabba a részintervallumba kerül, akkor pontosan egy részintervallumba nem kerül szám, amiből adódóan vagy a $\left[0;\frac{1}{100}\right)$ vagy a $\left[\frac{99}{100};1\right)$ intervallumban lesz szám a fentiek közül. Ha ez $\{kx\}$, akkor a legény k zsákot vihet haza, tehát ekkor is gazdagon távozik.

András Szilárd, Csíkszereda
Barta László, Benczúrfalva

Megjegyzés: A feladat tulajdonképpen „mesebeli" változata a következő tételnek: Az α valós szám első n többszöröse között van legalább egy olyan, amelynek a legközelebbi egész számtól való eltérése kisebb, mint $\frac{1}{n+1}$.

A megoldók száma: 6.

A megoldók névsora: Ambrus Gabriella, Budapest (37-39., 42.); András Szilárd, Csíkszereda (37., 38. 2 mód, 39-42.); Barta László, Benczúrfalva (37. 2 mód, 38., 39. 2 mód, 40-42.); Bíró Bálint, Eger (37-41.); Csete Lajos, Markotabödöge (37-40.); Csorba Ferenc, Győr (37-41.); Horváth Géza, Zseliz (37., 39., 41.); Kiss Géza, Kisújszállás (37-39., 42.); Kocsis Orsolya, Szolnok (37., 38., 40., 41.); László Sándor, Szombathely (37., 38., 39. 2 mód, 40., 41. 2 mód, 42.); Mészáros József, Galánta (37-41.); Simon József, Csíkszereda (37-41.); Tóth Sándor, Sárospatak (37. 2 mód, 38. 3 mód, 39. 2 mód, 40. 2 mód, 41. 2 mód); Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely (37-42.).

A Zrínyi Ilona Országos Matematikaverseny kiírása

A Zrínyi Ilona Matematikaverseny Szervezőbizottsága az 1995/96-os tanévben is megrendezi a kétfordulós (területi, országos) matematikaversenyt. A versenyt az előző évekhez hasonlóan teszt fomájában bonyolítjuk le.

A verseny résztvevői: A versenyen az általános iskolák 3-8. osztályos, a hatosztályos és nyolcosztályos gimnáziumok általános iskolás korú tanulói vehetnek részt. Egy iskolából tetszőleges számú versenyző indulhat. A versenyen a határainkon túl élő magyarul tudó diákok is részt vehetnek.

A területi forduló időpontja: 1996. márcitts 1. (péntek) 14 óra.

Az országos döntő helyszine és időpontja: Kecskemét,1995. március 30-április 1.

A verseny díjazása: A területi forduló minden résztvevője emléklapot és ajándékot kap. Az egyéni és csapatverseny legjobbjai értékes tárgyjutalomban részesülnek. Az egyéni versenyben legeredményesebben szereplő tanulókat meghívjuk az országos döntőre. (Minden területről évfolyamonként 100 indulóig 0 versenyző, 300 indulóig 1 versenyző, 500 indulóig 2 versenyző, 500 feletti induló esetén 3 versenyző jut be. Rajtuk kívül az országos eredmények összehasonlítása alapján is meghívunk versenyzőket.) Az országos döntőn minden résztvevő emléklapot, ajándékot kap. Az egyéni verseny legeredményesebb 20 versenyzőjét tárgyjutalomban részesítjük. A területi fordulón és az országos döntőn legeredményesebben szereplő iskola 1-1 számítógépet nyer. A versenyen legeredményesebben szereplő tanulók tanárait is tárgyjutalmat kapnak.

A verseny részvételi költsége: 300 Ft/fő.

Egyéb tudnivalók: Az iskoláknak a versenykiírást a verseny területi szervezői. postázzák 1995. december 15-ig. A versennyel kapcsolatban a területi szervezőknél lehet érdeklődni.

Mindenkinek eredményes versenyzést kívánnak a verseny szervezői.

FIGYELEM! Budapest kerületeit körzetesítettük. Az alábbi körzetekből várjuk sürgősen olyan iskolák jelentkezését, akik vállalják, hogy körzetükben az országos szervezőbizottság segítségével és irányításával megszervezik és lebonyolítják a verseny területi fordulóját: II. körzet: IV., XIII., XV. kerületek; V. körzet: I., II., VII. kerületek; VI. körzet: XI., XIII., XXII. kerületek

Az országos szervezőbizottság címe:

Mategye Alapítvány
6011 Kecskemét, Pf.: 585.
tel.: (76) 483-047

Pályázati felhívás

1996

Kedves Kollégák! Kedves Diákok!

A Mozaik Oktatási Stúdió és A matematika tanítása Szerkesztősége pályázatot hirdet az **1996**-os évszámmal kapcsolatban.

A pályamunkák az alábbi témákban készíthetők:

1. Feladatok, melyek 1996-hoz köthetők (a feladat eredménye 1996; a feladatban felhasznált számjegyek az 1, 9, 9, 6; oszthatóság 1996-tal kapcsolatban stb.)

2. Gondolatok, okfejtések, érdekességek, egyedi tulajdonságok keresése 1996-tal kapcsolatban.

A legötletesebb pályamunkákat a lap hasábjain megjelentetjük, szerzőinek tiszteletdíjat fizetünk.

A feladatokat megoldással együtt kérjük beküldeni.

Beküldési határidő: **1995. dec. 31.**

A pályázatokat a kiadó címére küldjék és a borítékra írják rá **1996.**!

Versenynaptár matematikából az 1995/96. tanévre				
	Fordulók			
Név, osztályok	*Iskolai*	*Megyei/fővárosi*	*Országos*	*Információ*
Varga Tamás Verseny 7. osztály - 8. osztály	1995. okt. 26. 14.00-16.00	1996. jan. 18. 14.00-16.00	1996. ápr. 25. 14.00-16.00	OKSZI Lajos Józsefné 132-88-30
Kalmár László Verseny 3. osztály - 8. osztály	1996. március első hete	1996. ápr. 3. 10.00 órától	1996. jún. 24-26. Vác	TIT Teleki L. Egyesület Naményi Béla 1383-544
Zrínyi Ilona Verseny 3. osztály - 8. osztály		1996. márc. 1.	1996. márc. 30-ápr 1.	MATEGYE Alapítvány Csordás Mihály Koleszár Edit 76/483-047
Észkerék - Törd a fejed! 1. osztály - 8. osztály	1995. szeptembertől - 1996. májusig kéthetente csütörtökönként 18.00 órától a Petőfi Rádióban			Magyar Rádió Szabó Teca 138-77-66
Arany Dániel Verseny Kezdők 8. osztály - 1. középiskola	1996. febr. 1. 14.00-18.00		1996. ápr. 11. 11.00-15.00	OKSZI André Lászlóné 111-86-75 Berzsenyi D. Gimnázium Urbán János 173-22-05
Arany Dániel Verseny Haladók I., II. 2. középiskola	1995. dec. 7. 14.00-18.00	1996. febr. 1. 14.00-18.00	1996. ápr. 11. 11.00-15.00	OKSZI André Lászlóné 111-86-75 Berzsenyi D. Gimnázium Urbán János 173-22-05
Arany Dániel Verseny Haladók III. 2. gimnázium (spec. mat.)	1996. febr. 1. 14.00-18.00		1996. ápr. 11. 11.00-15.00	OKSZI André Lászlóné 111-86-75 Berzsenyi D. Gimnázium Urbán János 173-22-05
OKTV I., II. 3-4. középiskola	1995. okt. 26. 14.00-19.00	1996. jan. 4. 10.00-15.00	1996. márc. 7. 10.00-15.00	OKSZI Lajos Józsefné 111-86-75 Berzsenyi D. Gimnázium Urbán János 173-22-05
OKTV III. 3-4. gimnázium (spec. mat.)	1996. jan. 4. 14.00-19.00		1996. márc. 7. 10.00-15.00	OKSZI Lajos Józsefné 132-88-30
A matematika tanítása Feladatmegoldó pontverseny			1996. jún. 2. 10.00	MOZAIK Oktatási Stúdió Sebestyén Gabriella 62/310-913

Könyvajánlat

Ábrahám Gábor

Nevezetes egyenlőtlenségek

A könyv elsősorban a téma szakkörön történő feldolgozásához igyekszik segítséget nyújtani a diákoknak és az őket tanító tanároknak. Mindazonáltal néhol túllép a szokványos középiskolai tananyag keretein, ezért matematika tagozatos középiskolásoknak, főiskolai, egyetemi hallgatóknak is ajánlható.

Az összeállítás két nagy fejezetre tagolható. Az első, a témakör elméleti részét foglalja össze úgy, hogy rámutat a különböző egyenlőtlenségtípusok szoros kapcsolatára. Ez a rész tartalmaz kidolgozott példákat is az egyes „elméleti" egyenlőtlenségek alkalmazására. A második fejezet 79 feladatot és ezek megoldásait foglalja magába. A feladatok három csoportja: bizonyítandó egyenlőtlenségek, egyenletek és geometriai egyenlőtlenségek. A példák sorrendjét sok helyen azok egymásra épülése határozza meg.

Megjelent ára: 396,- Ft

Székely Márton

Pentaminó

E könyv 5-10 éves gyermekeknek készült, figyelembe véve életkori sajátosságaikat. Eszereint a lefedendő alakzatok különböző állatok és egyszerű tárgyak, amelyek mondókákkal és rajzokkal kiegészítve, felkeltik a gyermekek érdeklődését.

A pentaminó olyan szellemi játék, amely a megfigyelőképességet, a kombinációs jártasságot fejleszti, és logikus gondolkodásra tanít. Teszi mindezt akkor, amikor a gyerek még nem, vagy csak alig tud írni-olvasni.

A könyv tehát jól használható otthon, az óvodában, az iskolában (matematika, technika és rajz órákon), vagy napközis foglalkozásokon.

Előkészületben

Dr. Hajnal Imre

Matematikai ismeretek 13-14 éveseknek

Ez a könyv a 13-14 éves tanulók tanításához, tanulásához úgy kíván segítséget nyújtani, hogy a matematikai fogalmak kialakulását, értelmezését és a közöttük lévő kapcsolatokat állítja előtérbe. Igyekszik rámutatni, hogy az egyszerű, megszokott munkában is felismerhetünk érdekességeket, és ezekből hasznos új ismeretekhez juthatunk. A megfigyelések tudatos megfogalmazása, és a lényeg felismerése után következik az új ismeret tisztázása, értelmezése. Közben lehetőséget ad, példát mutat elvonatkoztatásra, absztrakcióra.

Az anyag áttekintését, a logikai rend felismerését a tárgyalásmód igyekszik megkönnyíteni. Ezt a könyv szerkezete is segíti.

Megjelent
ára fűzve: 275,- Ft, kötve: 385,- Ft

imasoft